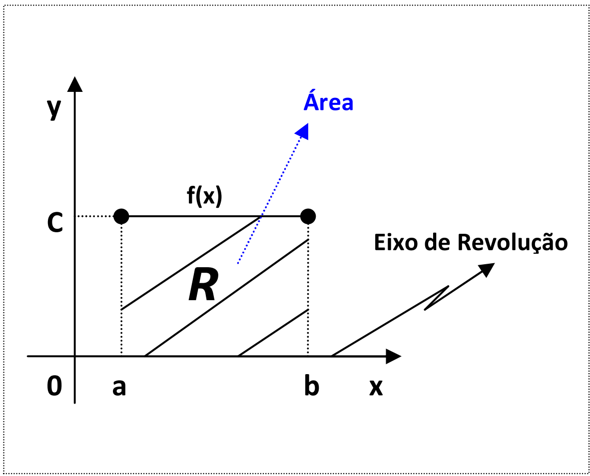
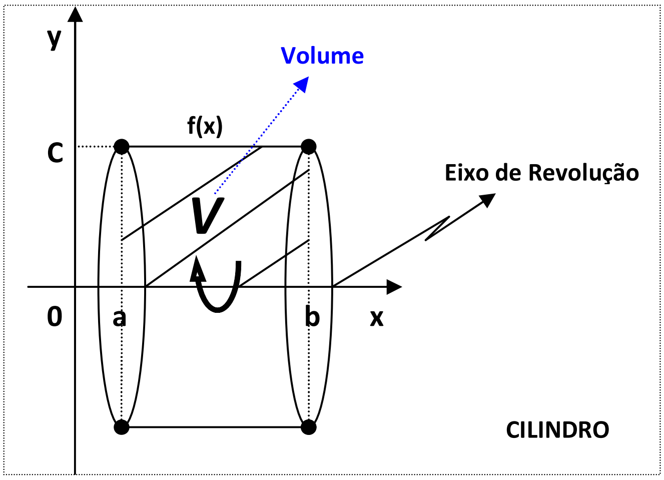
APLICAÇÃO DE INTEGRAL DEFINIDA: VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Fazendo-se uma região plana girar em torno de uma reta do plano, o sólido resultante é chamado sólido de revolução. A reta em torno da qual se processa a revolução é chamada de Eixo de Revolução.

Exemplos:

01) Cilindro:



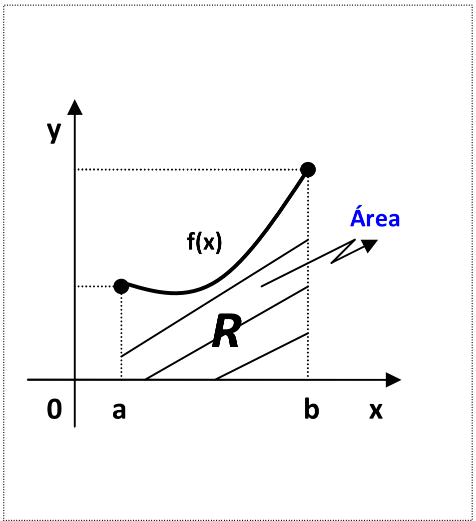


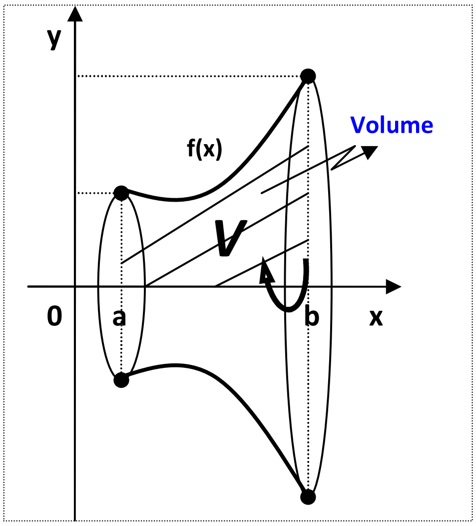
$$V_{cil} = Área \quad da \quad Base \quad x \quad Altura$$

$$V_{cil} = \pi . r^2 . h$$

$V_{cil} = \pi.(C)^2.(b-a)$ ou $V_{cil} = \pi.(f(x))^2.(b-a)$ $\therefore$ $\boxed{V_{cil} = \pi . \int_a^b [f(x)]^2 . dx}$

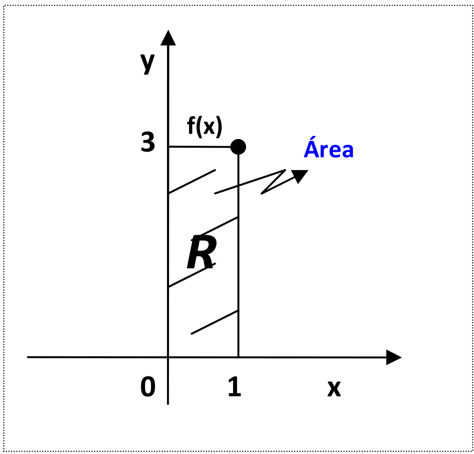
02) Consideremos agora, o problema de definir o volume do sólido V, gerado pela rotação em torno do eixo dos x, da região plana R:

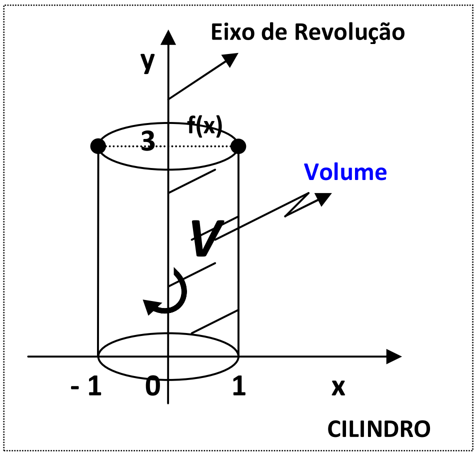




Seja f contínua em [a , b]. O volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelos gráficos de f, de x = a, x = b e do eixo x é dado por $\boxed{V = \pi . \int_a^b [f(x)]^2 . dx}$.

03) Se o retângulo delimitado pelas retas x = 0, x = 1, y = 0 e y = 3 girar em torno do eixo dos y, obtemos um cilindro.

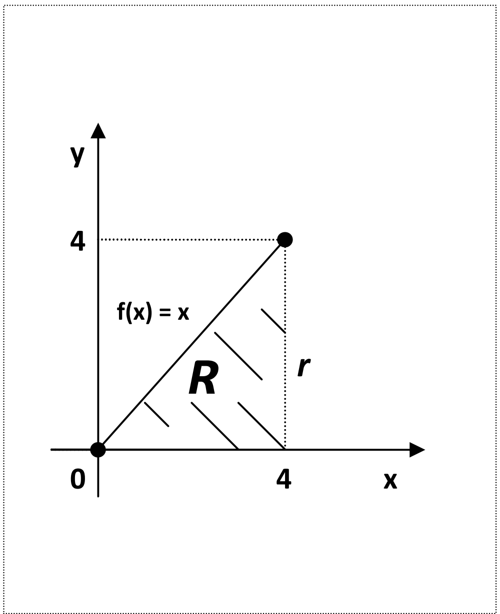


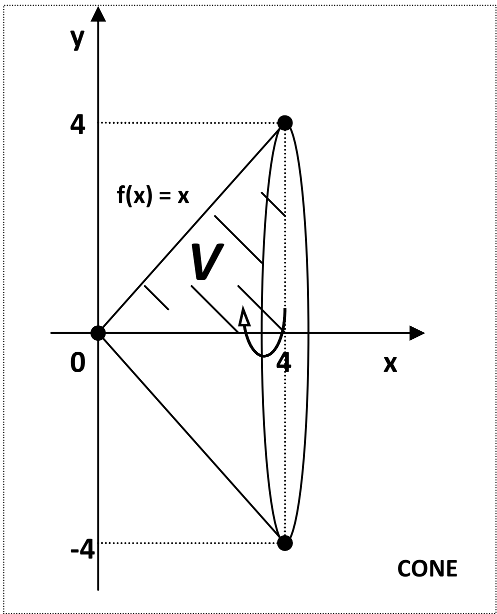


Exemplo Introdutório:

Fazendo a região limitada pelas retas y = 0 , y = x e x = 4 girar em torno do eixo dos x , o sólido de revolução obtido é um CONE, calcule seu volume:

Gráficos:





1ª Resolução: Cálculo do Volume através da Geometria Espacial:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.Área \quad da \quad Base \quad x \quad Altura$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.(4)^2.4$$

$$\boxed{V_{cone} = \frac{64}{3}.\pi \quad u.v.}$$

Unidade de Volume

2ª Resolução: Cálculo do Volume por Integral Definida:

$$V = \pi.\int_a^b [f(x)]^2.dx$$

$$V = \pi.\int_0^4 [x]^2.dx$$

$$V = \pi.\frac{x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$V = \pi.\frac{4^3}{3} - \pi.\frac{0^3}{3}$$

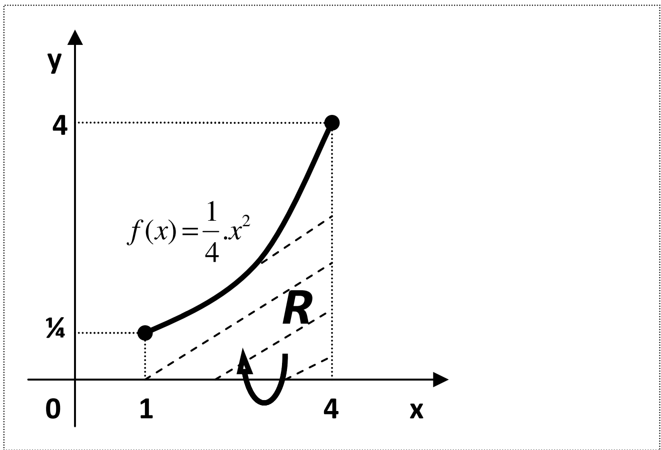
Substituição do limite superior “menos” o limite inferior. F(b) – F(a)

$$\boxed{V = \frac{64}{3}.\pi \quad u.v.}$$

Exercícios:

01) A região R, limitada pela curva $f(x) = \frac{1}{4}.x^2$, o eixo dos x e as retas x = 1 e x = 4 , gira em torno do eixo dos x. Encontre o volume do sólido de revolução gerado.

$$\boxed{Resp.: V = \frac{1023}{80}.\pi \quad u.v.}$$



02) Determine o volume do tronco de cone gerado pela rotação do segmento de reta AB, em torno do eixo dos x, sendo A = (1 , 1) e B = (2 , 3).

$\text{Resp.}: V = \frac{13}{3}.\pi \quad u.v.$

03) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de $f(x) = x^2$, x Є [1 , 3] , em torno do eixo dos x.

$\text{Resp.}: V = \frac{242}{5}.\pi \quad u.v.$

04) A curva $f(x) = \frac{1}{x}$, x Є [1 , 4] , ao ser girada em torno do eixo dos x determina um sólido de volume V. Calcule V.

$\text{Resp.}: V = \frac{3}{4}.\pi \quad u.v.$

05) Para cada x de [0 , 4] , a seção transversal é um círculo de raio $f(x) = \sqrt{x}$. Portanto, a área da mesma é $A(x) = \pi.(\sqrt{x})^2 \Rightarrow \pi.x$. O volume pedido é:

$\text{Resp.}: V = 8.\pi \quad u.v.$

06) Um cone é gerado pela rotação, em torno de Ox, da região sob o gráfico da função dada por $f(x) = \frac{2x}{3}$, 0 ≤ x ≤ 3 . Calcule seu volume.

$\text{Resp.}: V = 4.\pi \quad u.v.$

Referências Bibliográficas

BOULOS, PAULO, Cálculo Diferencial e Integral – Vol 1 – Editora Pearson.
LEITHOLD, L., O Matemática Aplicada à Economia e Administração. São Paulo: Harbra, 1988.
STEWART, JAMES, Cálculo Vol. I. 4ª Ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
SWOKOWSKI, EARL W., Cálculo com Geometria Analítica – Vol 1 – Editora Makron Books.
THOMAS, GEORGE B., Cálculo – Vol 1 – Editora Pearson.