MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Introdução

Se $f(x, y)$ é uma função de duas variáveis, então dizemos que $f(x, y)$ tem um **máximo** quando:

1. $x = a$ e $y = b$
2. $f(x, y)$ é no máximo igual a $f(a,b)$ se x está perto de a e y está perto de b.

Geometricamente, o gráfico de $f(x, y)$ tem um pico no ponto $(x, y) = (a,b)$ (veja a Figura 1a).

Da mesma forma, dizemos que $f(x, y)$ tem um **mínimo** quando:

1. $x = a$ e $y = b$
2. $f(x, y)$ é pelo menos igual a no máximo igual a $f(a,b)$ sempre que x está próximo de a e y está próximo de b.

Geometricamente, o gráfico de $f(x, y)$ tem uma queda cujo ponto extremo ocorre em $(x, y) = (a,b)$ (veja a Figura 1b).

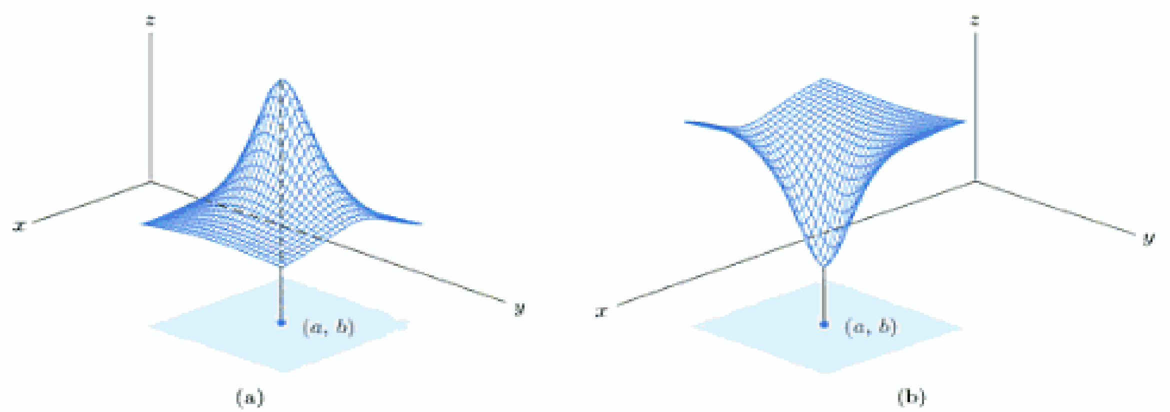

Figura 1: Pontos de máximo e mínimo

Vamos supor que a função $f(x, y)$ tem um mínimo em $(x, y) = (a,b)$ (**Figura 2**). Quando y é mantido constante igual a b, $f(x, y)$ é uma função de x com um mínimo em $x = a$, portanto, seu coeficiente angular é zero.

Ou seja, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$

Da mesma forma, quando x é mantido constante a a, $f(x, y)$ é uma função de y com um mínimo em $y = b$. Assim, sua derivada em relação a y é zero em $y = b$, isto é, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Considerações similares aplicam-se quando $f(x, y)$ tem um máximo em $(x, y) = (a,b)$.

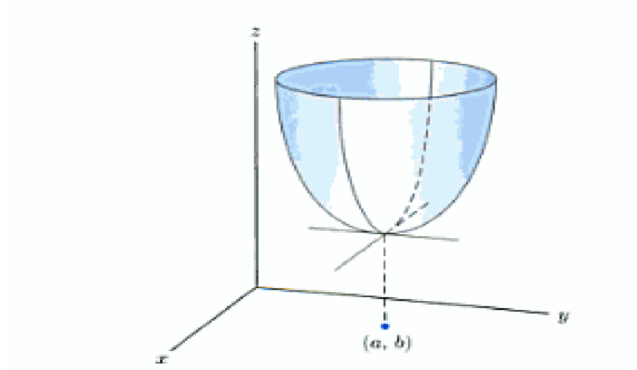

Figura 2: Ponto de mínimo tem retas tangentes horizontais.

Exemplo: O gráfico da função $f(x, y) = 3.x^2 - 4.x.y + 3.y^2 + 8.x - 17.y + 30$ é o gráfico mostrado na Figura 2. Encontre o ponto (a, b) no qual $f(x, y)$ atinge o seu valor mínimo.

Resolução:

1º Passo: Encontrando os valores de x e y para os quais ambas as derivadas parciais são zero.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 4y + 8 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 6y - 17$$

2º Passo: Determinando os valores de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e de $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ obtemos:

$$6x - 4y + 8 = 0 \qquad -4x + 6y - 17 = 0$$
$$6x - 4y = -8 \qquad -4x + 6y = 17$$

3º Passo: Resolvendo o sistema para determinar x e y:

$$\begin{cases} +6x - 4y = -8 & (I) \\ -4x + 6y = 17 & (II) \end{cases}$$

Dividindo por 2 (dois), todos os elementos da I equação.

$$\begin{cases} +3x - 2y = -4 \\ -4x + 6y = 17 \end{cases}$$

Multiplicando por 3 (três), todos os elementos da I equação.

$$+\begin{cases} +9x - 6y = -12 \\ -4x + 6y = 17 \end{cases}$$

$$5x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{5} \Rightarrow x = 1$$

$$-4x + 6y = 17$$
$$-4.1 + 6y = 17$$
$$-4 + 6y = 17 \Rightarrow 6y = 17 + 4 \Rightarrow 6y = 21 \Rightarrow y = \frac{21:3}{6:3} \Rightarrow y = \frac{7}{2}$$

Se $f(x, y)$ tem um mínimo ele deve ocorrer quando $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Determinamos que as derivadas parciais são simultaneamente zero quando $x = 1$ e $y = \frac{7}{2}$. A figura 2 nos mostra que $f(x, y)$ tem um mínimo, portanto este mínimo deve ocorrer em $(x, y) = \left(1, \frac{7}{2}\right)$.

Importante: Ao considerar uma função de duas variáveis, encontramos os pontos (x, y) para os quais $f(x, y)$ pode ter um ponto de máximo ou de mínimo, igualando $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ a zero e resolvendo o sistema de equações obtido para x e y. Entretanto, se nenhuma outra informação adicional a respeito de $f(x, y)$ for fornecida, pode ser difícil determinar se os valores obtidos para as variáveis correspondentes a um ponto de máximo ou de mínimo (ou nenhuma dessas opções). No caso de uma função de uma variável, estudamos concavidade e deduzimos o teste da segunda derivada. Existe um análogo ao teste da derivada segunda para funções de duas variáveis.

Condição Suficiente ou Teste da Derivada Segunda para Funções de Duas Variáveis:

Seja f uma função definida num conjunto $D \subset \Re^2$ e (x_0, y_0) um ponto interior de D tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, isto é, um possível ponto de máximo ou de mínimo de f.

Nestas condições, se f é diferenciável no ponto (x_0, y_0) e se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são também diferenciáveis em (x_0, y_0) temos:

(Caso 1) (x_0, y_0) é o ponto de máximo se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$$

(Caso 2) (x_0, y_0) é o ponto de mínimo se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$$

(Caso 3) (x_0, y_0) não é ponto de máximo nem de mínimo se (neste caso, diremos que (x_0, y_0) é um ponto de sela)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(x_0, y_0)\right]^2 < 0$$

Exemplo: Considere a função $f(x,y) = x^3 - y^2 - 12.x + 6y + 5$. Encontre todos os pontos $f(x,y)$ onde máximos ou mínimos ocorrem. Utilize o teste da derivada segunda para determinar a natureza de cada ponto.

Resolução:

1º Passo: Encontrando os valores de x e y para os quais ambas as derivadas parciais são zero.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 6$$

2º Passo: Determinando os valores de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e de $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ obtemos:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

e

$$-2y + 6 = 0$$
$$-2y = -6$$
$$y = 3$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e de $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, quando $(x,y) = (2,3)$ (**1º ponto**) e quando $(x,y) = (-2,3)$ (**2º ponto**).

3º Passo: Teste da segunda derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(x_0,y_0)\right]^2 \Rightarrow 6x.-2-[0]^2 \Rightarrow -12.x$$

Verificando 1º ponto (2 , 3):

$(x,y) = (2,3) \Rightarrow -12.x \Rightarrow -12.2 \Rightarrow -24$ é negativo, pelo **caso 3** do teste da derivada segunda, a função $f(x,y)$ **não tem ponto de máximo ou ponto de mínimo** em $(x,y) = (2,3)$.

Verificando 2º ponto (– 2 , 3):

$(x,y) = (-2,3) \Rightarrow -12.x \Rightarrow -12.-2 \Rightarrow 24$ é positivo, a função $f(x,y)$ tem um ponto de máximo ou um ponto de mínimo em $(x,y) = (-2,3)$, para determinar qual deles, calculamos:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,3) = 6.-2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,3) = -12$ é negativo, pelo **caso 1** do teste da derivada segunda, a função $f(x,y)$ tem um **ponto de máximo** em $(x,y) = (-2,3)$.

Atividades Práticas

Determinar, caso existam, os pontos de máximo e os pontos de mínimo das funções dadas por:

01) $f(x, y) = x^2 + y^2$ Resp.: $(0,0)$ é ponto de mínimo da função dada.

02) $f(x, y) = -(x-4)^2 - (y-2)^2$ Resp.: $(4,2)$ é ponto de máximo da função dada.

03) $f(x, y) = 4x^2 - 5y^2 + 2xy + 4x - 8y + 10$

Resp.: $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}\right)$ não é ponto de máximo nem de mínimo (ponto de sela).

04) $f(x, y) = -y^2 - 4x^2 + 10y + 5x + 10$ Resp.: $\left(\frac{5}{8}, 5\right)$ é ponto de máximo da função dada.

05) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 15$

Resp.: $(1,2)$ é ponto de mínimo, $(-1,-2)$ é o ponto de máximo, $(1,-2)$ e $(-1,2)$ pontos de sela.

.

Bibliografia:

BOULOS, P. Calculo Diferencial e Integral. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002.

BOYCE, W.E. Equações Diferenciais Elementares

BRONSON, R. Equações Diferenciais. 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1994.

FIGUEIREDO, D. G. Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro: Impa, 1979.

IGM, disponível em www.igm.mat.br

LEITHOLD, L. O Calculo Com Geometria Analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

SILVA, S.M., Matemática. São Paulo: Atlas, 1997.

SIMMONS, G. F. Calculo Com Geometria Analítica. Sao Paulo: Pearson Makron Books, 2005.

STEWART, J. Calculo. 4. ed. Sao Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

SWOKOWSKI, E. W. Calculo Com Geometria Analítica. 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1995.

PISKOUNOV, N. S. Calculo Diferencial e Integral. 17. ed. Porto: Edições Lopes da Silva, 1997.

THOMAS JR., G. B. Calculo. 10. ed. Sao Paulo: Addison-Wesley, 2005.