FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

INTRODUÇÃO

Uma grandeza física pode depender de diversas outras grandezas. Por exemplo: a velocidade do som em um gás ideal depende da densidade do gás e de sua pressão.

Muitas funções dependem de mais de uma variável independente:

- a área de um retângulo depende de duas quantidades → ***comprimento e largura***;

- a função **V = π.r².h** calcula o volume de um cilindro circular reto a partir do seu raio “r” e altura “h”;

- o volume de um paralelepípedo retângulo de comprimento x, largura y e altura z é dado por **V = x.y.z**, portanto, o volume depende das dimensões x, y e z;

- se um objeto está localizado no espaço a temperatura em um ponto P do objeto pode depender de **três coordenadas retangulares x, y, z de P**;

- Se a temperatura de um objeto no espaço varia com o tempo t, então estão em jogo **quatro variáveis: x, y, z e t**.

As funções reais de várias variáveis reais independentes são definidas basicamente da mesma forma que as de uma variável. Os domínios são conjuntos de pares ordenados e números reais (triplas, quádruplas, n-uplas), e as imagens são conjuntos de números reais. (Thomas, 287 e Swokowski, 347).

EXEMPLO GRÁFICO:

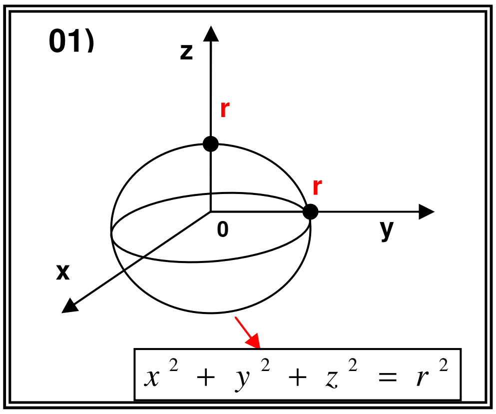
Da equação **x² + y² + z² = r² (r > 0)**, que é da superfície <u>esférica</u> de centro na origem e raio r, resulta:

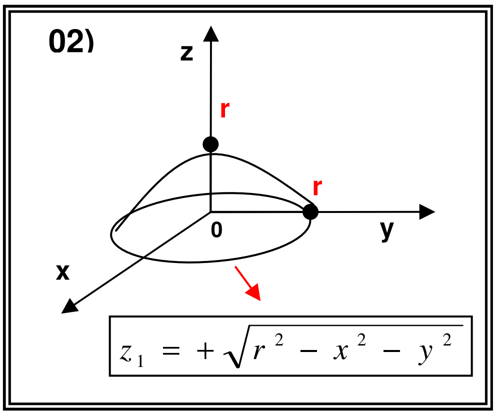
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

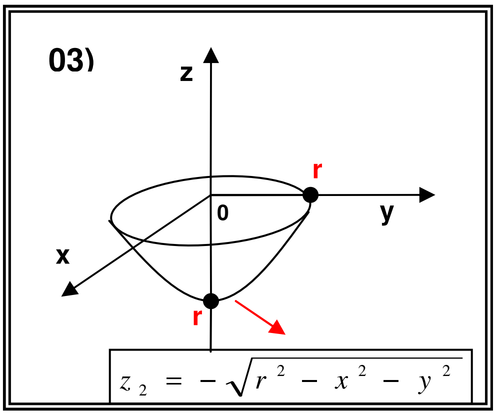
$$z^2 = r^2 - x^2 - y^2$$

$$z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{cases} z_1 = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \\ z_2 = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$







LIMITES E CONTINUIDADE

A definição do limite de uma função de duas ou três variáveis é similar à definição do limite de uma função de uma variável.

DEFINIÇÃO INTUITIVA DE LIMITE: Se f(x,y) se aproxima de um número **L** quando (x,y) do domínio de f se aproxima de (x_0, y_0), indicamos:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

PROPRIEDADES DOS LIMITES DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

As regras a seguir são verdadeiras se L, M e k são números reais e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

1. Regra da Soma: $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L + M$$

2. Regra da Diferença: $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) - g(x,y)] = L - M$$

3. Regra do Produto: $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y).\,g(x,y)] = L.M$$

4. Regra da Multiplicação por Constante: $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [k.f(x,y)] = k.L$$

5. Regra do Quociente: $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

6. Regra da Potência: $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^{r/s} = L^{r/s}$$

Se r e s forem inteiros sem nenhum fator comum e s ≠ 0, desde que $L^{r/s}$ seja um nº real. (se s é par, assumimos que L > 0).

EXEMPLOS: **Calculando os Limites:**

01) $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3} =$$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{0 - 0.1 + 3}{0^2.1 + 5.0.1 - 1^3} = \frac{3}{-1} = \boxed{-3}$$

02) $$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} =$$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

03) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0^2 - 0.0}{\sqrt{0} - \sqrt{0}} = \frac{0}{0}$$

Como o denominador se aproxima de ***zero*** *é preciso, primeiramente, tirar a indeterminação.*

Então:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} =$$

Multiplicando pelo conjugado das raízes.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2.\sqrt{x} + x^2.\sqrt{y} - xy.\sqrt{x} - xy.\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2.(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - xy.(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x - y)} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y}).(x^2 - xy)}{(x - y)} =$$

Colocando em evidência.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y}).x.\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}} =$$

Simplificando (x – y).

Eliminado a indeterminação.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x} + \sqrt{y}).x = \boxed{0}$$

ATIVIDADES PRÁTICAS

Encontre os seguintes limites:

01) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} =$ **Resposta: 5/2 ou 2,5**

02) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \dfrac{x}{\sqrt{y}} =$ **Resposta: 0**

03) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} =$ **Resposta:** $2.\sqrt{6}$

04) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 =$ **Resposta: 1/36 ou 0,0277**

05) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x . tg y =$ **Resposta: 1**

06) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos \dfrac{x^2 + y^3}{x + y + 1} =$ **Resposta: 1**

07) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} =$ **Resposta: ½ ou 0,5**

08) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} =$ **Resposta: 0**

09) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} =$ **Resposta: 2**

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy - y - 2x + 2}{x - 1} =$ **Resposta: – 1**

11) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \dfrac{y+4}{x^2.y - xy + 4x^2 - 4x} =$ **Resposta: ½ ou 0,5**

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} =$ **Resposta: ¼ ou 0,25**

13) $\lim\limits_{P\to(1,3,4)} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) =$ **Resposta: 19/12 ou 1,5833**

14) $\lim\limits_{P\to(3,3,0)} (sen^2 x + \cos^2 y + \sec^2 z) =$ **Resposta: 2**

15) $\lim\limits_{P\to(\pi,0,3)} z.e^{-2y}.\cos 2x =$ **Resposta: 3**

DERIVADAS PARCIAIS (FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS)

DERIVADAS PARCIAIS

O cálculo de derivadas envolvendo funções de várias variáveis é, na realidade, o cálculo da derivada de uma variável aplicado a várias variáveis “uma de cada vez”. Quando fixamos todas as variáveis independentes de uma função e derivamos em relação a uma dessas variáveis, obtemos uma derivada “parcial”.

Definimos a derivada **f´(x)** de uma função de uma variável como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Seja f uma função de duas variáveis. As derivadas parciais primeiras de f em relação a x e a y são as funções $\mathbf{f_x}$ e $\mathbf{f_y}$ tais como:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

e

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

NOTAÇÕES PARA DERIVADAS PARCIAIS: **(∂ chamado “DEL”)**

Se w = f (x , y), então → $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

- $f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = wx$
- $f_y(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = wy$

EXEMPLOS:

01) Se f (x , y) = $x^3.y^2 - 2.x^2.y + 3.x$, ache

a) $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$

b) $f_x(2, -1)$ e $f_y(2, -1)$

Resolução:

a) $$f_x(x, y) = x^3.y^2 - 2.x^2.y + 3x$$

*Considerando **y** como constante e diferenciando em relação a **x**.*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 3.x^2.y^2 - 4.x.y + 3}$$

$$f_y(x, y) = x^3.y^2 - 2.x^2.y + 3x$$

*Considerando **x** como constante e diferenciando em relação a **y**.*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 2.x^3.y - 2.x^2}$$

b) $$f_x(2,-1) = x^3.y^2 - 2.x^2.y + 3x$$

*Primeiro encontramos a derivada parcial em relação a **x** e em seguida substituímos os valores (2 , – 1).*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3.x^2.y^2 - 4.x.y + 3$$

$$f_x(2,-1) = 3.2^2.(-1)^2 - 4.2.(-1) + 3 = 12 + 8 + 3 = \boxed{23}$$

$$f_y(x, y) = x^3.y^2 - 2.x^2.y + 3x$$

*Primeiro encontramos a derivada parcial em relação a **y** e em seguida substituímos os valores (2 , – 1).*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2.x^3.y - 2.x^2$$

$$f_y(2,-1) = 2.2^3.(-1) - 2.2^2 = -16 - 8 = \boxed{-24}$$

02) **Função de três variáveis** ***w (x , y , z)*** **, calcule a derivada parcial em relação a cada uma das variáveis de** ***w (x , y , z)*** **= $x^3.y.z^2 + x + 2.y + 4$.**

Resolução:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x} = 3.x^2.y.z^2 + 1}$$

*Considerando **y** e **z** constantes.*

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial y} = x^3.z^2 + 2}$$

*Considerando **x** e **z** constantes.*

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = 2.x^3.y.z}$$

*Considerando **x** e **y** constantes.*

03) **Ache** $\frac{\partial w}{\partial y}$ **se** ***w (x , y , z)*** **= $x.y^2.e^{x.y}$.**

Resolução:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2.x.y.e^{xy} + x.y^2.x.e^{xy}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial y} = 2.x.y.e^{xy} + x^2.y^2.e^{xy}}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial y} = xy.(2 + xy).e^{xy}}$$

*Evidência **$x.y.e^{xy}$***

*Considerando **x** constante, temos:*
u . v = u´.v + u.v´
então, **$x.y^2.e^{x.y}$** *:*

$$\begin{cases} u = x.y^2 \\ v = e^{xy} \end{cases}$$

Regra de derivação a ser usada:

(e^u) ´ = u´. e^u

04) **Ache** $\frac{\partial w}{\partial y}$ **se** ***w (x , y)*** **= y.sen xy .**

Resolução:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial y} = senxy + y.x.\cos xy}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial y} = \boxed{xy.\cos xy + senxy}}$$

*Considerando **x** constante, temos:*
u . v = u´.v + u.v´
então, **y.sen xy** *:*

$$\begin{cases} u = y \\ v = sen\ xy \end{cases}$$

Regra de derivação a ser usada:

(sen u) ´ = u´. cos u

05) Encontre f_x e f_y se $f(x,y) = \dfrac{2y}{y + \cos x}$ **.**

Regra de Derivação "Quociente":

$$\frac{u}{v} = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Resolução:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{0.(y+\cos x) - 2y.(0 - senx)}{(y+\cos x)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{+2y.senx}{(y+\cos x)^2}}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2.(y+\cos x) - 2y.(1+0)}{(y+\cos x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{+2y + 2\cos x - 2y}{(y+\cos x)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}}$$

06) Ache as derivadas <u>segundas</u> de f se **f (x , y) = $x^3.y^2 - 2.x^2.y + 3.x$.**

Resolução:

1ª) $f_{xx}(x,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3.x^2.y^2 - 4.x.y + 3 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{6xy^2 - 4y}$

2ª) $f_{yy}(x,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2.x^3.y - 2.x^2 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{2x^3}$

3ª) $f_{xy}(x,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3.x^2.y^2 - 4.x.y + 3 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = \boxed{6x^2y - 4x}$

4ª) $f_{yx}(x,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2.x^3.y - 2.x^2 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x} = \boxed{6x^2y - 4x}$

OBS: Temos que: $f_{xy} = f_{yx} \quad ou \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x}$

07) Encontre $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}$ **se** $w = x.y + \dfrac{e^y}{y^2+1}$ **.**

Resolução:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \boxed{y} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y} = \boxed{1}$$

ATIVIDADES PRÁTICAS

RESOLVA AS DERIVADAS PARCIAIS OBSERVANDO OS EXEMPLOS DADOS EM NOSSA PARTE TEÓRICA:

01) Encontre os valores de $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \; e \; \frac{\partial f}{\partial y}}$ **no ponto (4 , – 5) se f (x , y) = x² + 3.x.y + y – 1 .**

Resposta: – 7 e 13

02) Se f (x , y) = x.cos y + y.e^x , encontre $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y . \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \; e \; \frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y}}$

Resposta: y.e^x , – sen y + e^x , – x.cos y e – seny + e^x

03) Encontre a derivada parcial de quarta ordem f_{yxyz} se f (x , y , z) = 1 – 2.x.y².z + x².y .
f_y , f_{yx} , f_{yxy} e f_{yxyz}.

04) Calcular as derivadas parciais de 1ª ordem $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \; e \; \frac{\partial f}{\partial y}}$ **das funções.**

a) f (x , y) = 2.x² – 3.y – 4

b) f (x , y) = x² – x.y + y²

c) f (x , y) = (x² – 1). (y + 2)

d) f (x , y) = (x.y – 1) ²

e) f (x , y) = (2.x – 3.y) ³

f) $f(x, y) = e^{(x + y + 1)}$

g) $f(x, y) = \frac{x + y}{xy - 1}$

05) Encontre todas as derivadas parciais de segunda ordem das funções:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \ e \ \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}}$$

a) f (x , y) = x + y + x.y

b) f (x , y) = sen x

c) f (x , y) = x^2.y + cos y + y.sen x

d) f (x , y) = x.e^y + y + 1

e) f (x , y) = ln (x + y)

06) Verifique se $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0}$ **onde** $f(x, y, z) = \ln\left|x^2 + y^2 + z^2\right|$ **.**

Obs: A Equação acima é chamada "Equação de Laplace". Trata-se de uma equação diferencial (derivadas) de alta relevância, pois é descritora modelar de comportamentos em vários campos da ciência, como, por exemplo, a astronomia, o eletromagnetismo, a mecânica dos fluídos, formulando-lhes as funções potencial gravitacional, elétrica, fluídica, entre outras aplicações.

BIBLIOGRAFIA:

SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica Vol.2 – BOYCE, W.E. Equações Diferenciais Elementares – PISKOUNOV, N. Cálculo Dif.e Integral Vol.II – THOMAS, G.B. Cálculo Vol.2 – BOULOS, P. Cálculo Diferencial e Integral Vol.2 – LEITHOLD, L. O Calculo Com Geometria Analítica – STEWART, J. Cálculo Vol.2

"PESQUISE PARA APROFUNDAR SEU CONHECIMENTO"