FUNÇÕES E SUAS PROPRIEDADES

Í N D I C E

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

FUNÇÃO - Definição:

Uma função ***f*** definida em um conjunto de números reais A, é uma regra ou lei (equação ou algoritmo) de correspondência, que atribui um único número real ***y*** a cada número ***x*** do conjunto A. O conjunto A dos valores permitidos para ***x*** chama-se ***Domínio*** da função e o conjunto dos valores correspondentes de ***y*** chama-se ***Imagem*** da função.

Representação: $y \ ou \ f(x)$, pois $y = f(x)$

Exemplo:

$y = x + 2 \quad ou \quad f(x) = x + 2$ sendo $\begin{cases} \textbf{x – variável independente} \\ \textbf{y – variável dependente} \end{cases}$

Noção Prática de Função: é quando o valor de uma quantidade depende do valor de outra.

Exemplos:

- Salário (**variável dependente y**) é função do nº de horas trabalhadas (**variável independente x**);
- Produção de uma fábrica (**y**) depende do número de máquinas utilizadas (**x**);
- Resistência de um fio elétrico (**y**) depende do diâmetro do fio com comprimento fixo (**x**);
- Volume de um gás a pressão constante (**y**) depende da temperatura (**x**); etc.
- $Salário = 15 \cdot Horas$

Variável Dependente:
Salário

Variável Independente:
Nº de horas trabalhadas

$ou \quad y = 15 .x \qquad ou \quad f(x) = 15 .x$

Exemplos Práticos:

01) Seja f uma função definida pela equação $y = \sqrt{x-4}$, verifica-se que, sendo $y = f(x)$, tem-se:

→ **se** $x - 4 \geq 0$**, então x ≥ 4, e**

→ **se** $x - 4 < 0$**, não existe solução, isto é, y não será um número real.**

Portanto, o **domínio (valor que "x" pode assumir)** de f é [4,+∞[e a **imagem (resultado da função após substituição dos valores que "x" pode assumir)** de f é [0,+∞[.

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

Resolução: $f(x)=\sqrt{x-4}$

$f(4)=\sqrt{4-4} \Rightarrow f(4)=\sqrt{0} \Rightarrow f(4)=0$

$f(5)=\sqrt{5-4} \Rightarrow f(5)=\sqrt{1} \Rightarrow f(5)=1$

$f(6)=\sqrt{6-4} \Rightarrow f(6)=\sqrt{2} \Rightarrow f(6)=\sqrt{2}$

$f(7)=\sqrt{7-4} \Rightarrow f(7)=\sqrt{3} \Rightarrow f(7)=\sqrt{3}$

$f(8)=\sqrt{8-4} \Rightarrow f(8)=\sqrt{4} \Rightarrow f(8)=2$

$f(9)=\sqrt{9-4} \Rightarrow f(9)=\sqrt{5} \Rightarrow f(9)=\sqrt{5}$

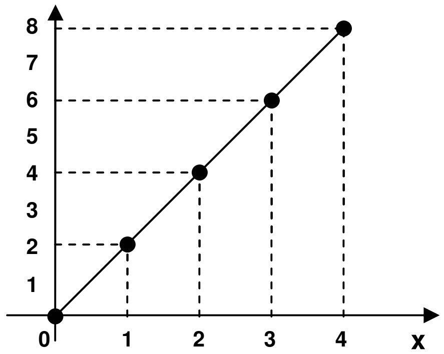
$f(10)=\sqrt{10-4} \Rightarrow f(10)=\sqrt{6} \Rightarrow f(10)=\sqrt{6}$

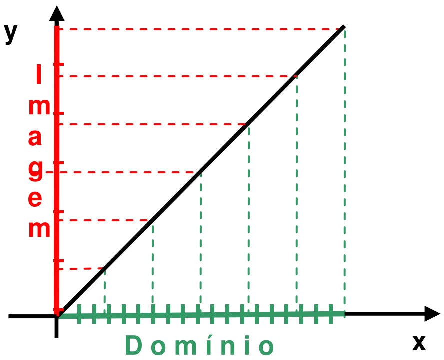
Considerando a função como um conjunto de pares ordenados, temos:

x	4	5	6	7	8	9	10	...	$+\infty$	**Domínio = [4,+∞[**
$y=\sqrt{x-4}$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	...	$+\infty$	**Imagem = [0,+∞[**
(x,y)	(4,0)	(5,1)	$(6,\sqrt{2})$	$(7,\sqrt{3})$	(8,2)	$(9,\sqrt{5})$	$(10,\sqrt{6})$	...	...	**(Domínio, Imagem)**

02) Função f: [0 , 4] → R, definida pela lei ***f(x) = 2.x*** (função do 1º grau – gráfico "reta").

x	y = 2x
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8



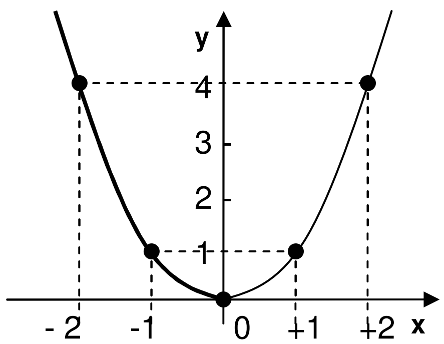


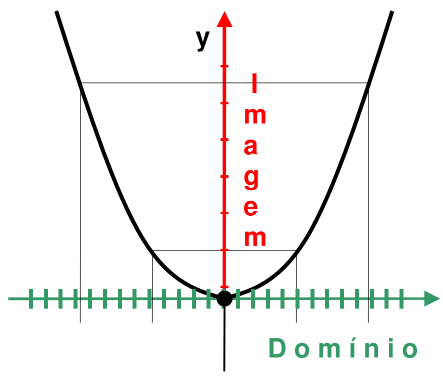
Nesta função: **Domínio:** **D(f) = {x Є R / 0 ≤ x ≤ 4} ou [0,4]**

Imagem: **Im(f) = {y Є R / 0 ≤ y ≤ 8} ou [0,8].**

03) Função f: R → R, definida pela lei ***f(x) = x²*** (função do 2º grau – gráfico "parábola").

x	y = x^2
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4





Nesta função: **Domínio:** **D(f) = R ou]-∞,+∞[**

Imagem: **Im(f) = {y Є R / y ≥ 0} ou R_+ ou [0,+∞[**

Atividades Práticas

01) Dada a função f definida por f(x) = $x^2 + 8.x - 5$. Calcule: f(0); f(x+h) e f(x) +f(h).

02) Calcule $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ onde $h \neq 0$, se f(x) = $3.x^2 - 10.x + 9$.

03) Dada à função f definida por f(x) = $x^3 + x - 10$. Calcule: f(0); f(x+h) e f(x) +f(h).

04) Calcule $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ onde $h \neq 0$, se f(x) = $7.x^2 - 4.x + 3$.

05) Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 600,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 8% do total de vendas que ele fez durante o mês.

a) Expressar a função que representa seu salário mensal;

b) Calcular o salário do vendedor sabendo que durante um mês ele vendeu R$ 20.000,00 em produtos.

06) O preço a pagar por uma corrida de táxi depende da distância percorrida. A tarifa é composta de duas partes: uma fixa denominada bandeirada e uma parte variável que depende do número de quilômetros rodados. Suponha que a bandeirada esteja custando R$ 15,00 e o quilômetro rodado, R$ 0,50.

a) Expressar a função que representa a tarifa

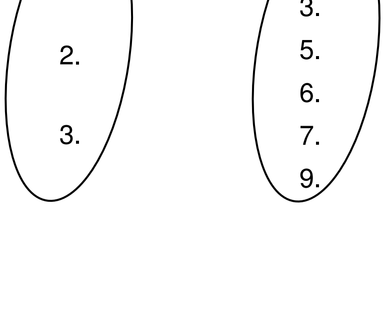
b) Quanto se pagará por uma corrida em que o táxi rodou 32 km?

07) Determine o conjunto imagem da função $f : \{-2, 0, \sqrt{2}\} \rightarrow \Re$ definida por f(x) = $x^2 + 3$.

08) Dadas as funções definidas por $f(x) = \frac{1}{2}.x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$, calcule $f(6) + g(-2)$.

09) São dadas as funções $f(x) = 3.x + 1$ e $g(x) = \frac{4}{5}.x + a$. Sabendo que $f(1) - g(1) = \frac{2}{3}$, calcule o valor de a.

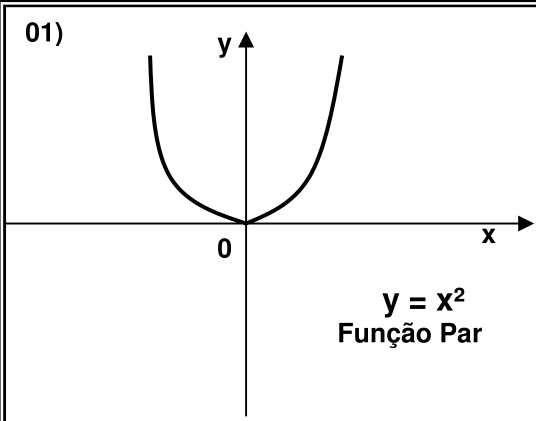
10) Determine os pares ordenados da função $f : A \rightarrow B$, definida por f(x) = 2.x + 1.



Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

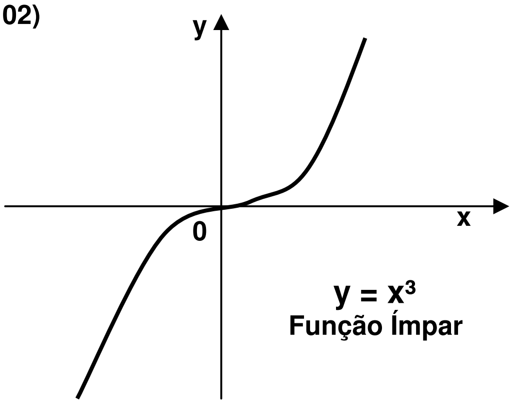
Gráficos (RESUMO): Domínio e Imagem

01)



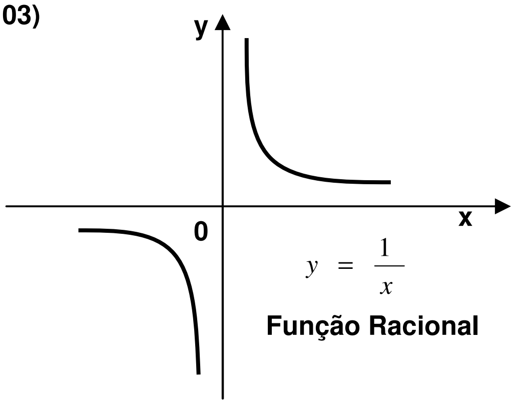
D(f) = – ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = 0 ≤ y < +∞ ou [0,+∞[

02)



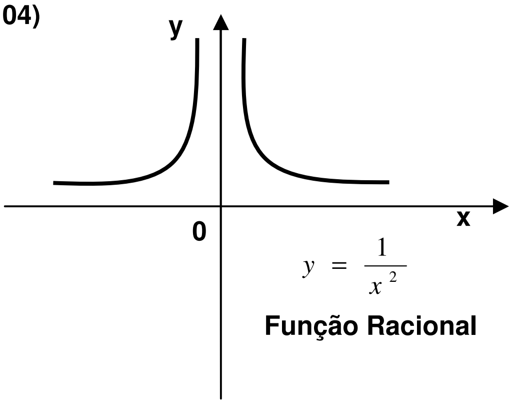
D(f) = – ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = – ∞ < y < + ∞ ou R

03)



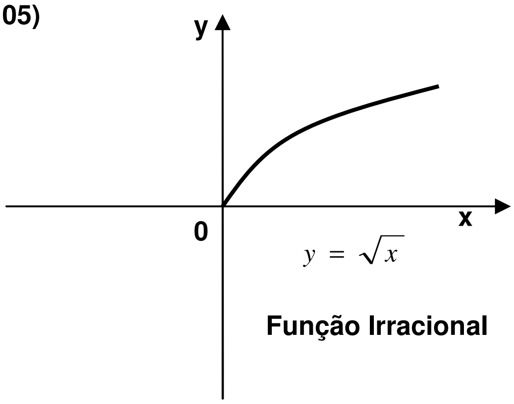
D(f) = x ≠ 0 ou R*
Im(f) = y ≠ 0 ou R*

04)



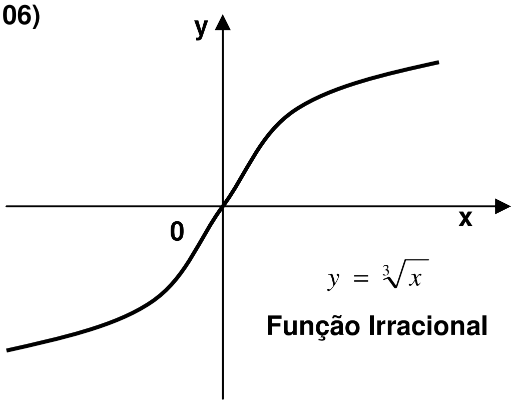
D(f) = x ≠ 0 ou R*
Im(f) = 0 < y < +∞ ou R_+^*

05)



D(f) = 0 ≤ x < + ∞ ou [0,+∞[
Im(f) = 0 ≤ y < + ∞ ou [0,+∞[

06)



D(f) = - ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = - ∞ < y < + ∞ ou R

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

Atividades Práticas

A) Determine o domínio de cada função definida por:

01) f(x) = 2x – 5

02) f(x) = 2x – 5 , com 1 ≤ x ≤ 10

03) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$

04) $f(x)=\sqrt{x-2}$

05) $f(x)=\dfrac{5x-3}{x^2-16}$

06) $f(x)=\sqrt{5-3x}$

07) $f(x)=\sqrt{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

B) Determine o domínio de cada função definida por:

01) $f(x)=\dfrac{x}{x-5}$

02) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x}$

03) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

04) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$

05) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9x+20}$

06) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+3}$

07) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-9}$

08) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

09) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

10) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{3x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3}+\dfrac{2x}{\sqrt{x+4}}$

12) $f(x)=\sqrt[3]{4x+1}$

RESUMO DOS TIPOS DE FUNÇÕES:

Tipos de Funções	Exemplos
Par f(-x) = f(x)	$y=x^4 \rightarrow y=(-x)^4=x^4$
Impar f(-x) = - f(x)	$y=x^3 \rightarrow y=(-x)^3=-x^3$
Polinomiais $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+..+a_nx^n$	$y=3+5x-7x^2$ e outros.
Racionais $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$y=\dfrac{2x^3+4x}{x^2+2x}$
Algébricas	Todas as anteriores.
Trigonométricas	y = senx , cosx , etc.
Trigonométricas Inversas	$y=\arccos x=\cos^{-1}x$
Logarítmicas	$y=\ln x$, ou $y=\log_a x$
Exponenciais	$y=e^{f(x)}$ ou $y=a^{f(x)}$
Hiperbólicas	$f(x)=tghx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

Tipos de Funções

As funções mais usuais são: as pares, as ímpares, as polinomiais, as racionais, as algébricas, exponenciais e as trigonométricas.

Função Polinomial

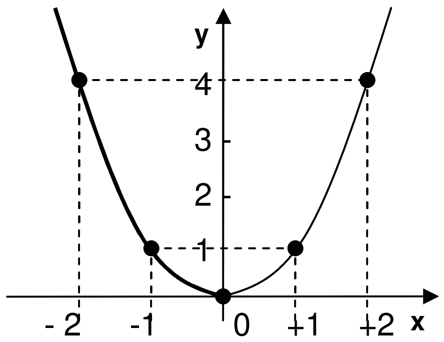
$f(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + ... + a_1.x + a_0$, para $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais ($a_n \neq 0$) e n um número inteiro não negativo (Z_+).

Exemplo: $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$

PARIDADE DE UMA FUNÇÃO

01) EXPOENTE PAR:

Exemplo: $f(x) = x^2$



D(f) = R
Im(f) = R_+

Esta função é **simétrica** em relação ao eixo y (função par).

$f(x) = x^n$, n sendo par e $n \geq 2$

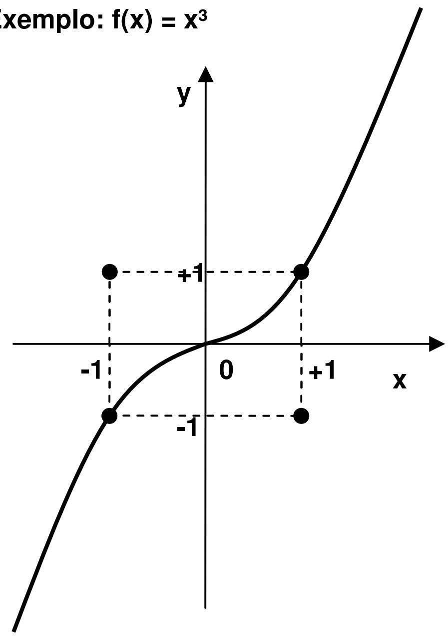
$$\therefore \quad f(-x) = f(x)$$

Exemplo: f(x) = x²

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

02) EXPOENTE ÍMPAR:

Exemplo: $f(x) = x^3$



D(f) = R
Im(f) = R

Esta função é **simétrica** em relação à origem (função ímpar).

$f(x) = x^n$, n sendo ímpar e $n \geq 3$

$$\therefore \quad f(-x) = -f(x)$$

Exemplo: f(x) = x³

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

FUNÇÃO LINEAR:

$y = A.x$ ou $f(x) = A.x$

É a função *f* dada por ***y = A.x***, com x Є R e A um número real qualquer não nulo (zero).

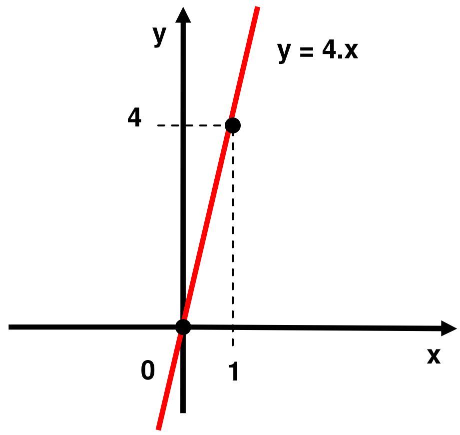
A representação gráfica de uma função linear é uma reta que contém a origem (0,0) do sistema de eixos (plano cartesiano x,y), ou seja, **a reta dessa função sempre irá passar pela origem do plano cartesiano (x,y)**. Sendo assim, necessitamos, portanto, de apenas mais um ponto para construir a reta.

No exemplo a seguir, além do número 0 (zero), estamos atribuindo aleatoriamente o valor 4 (quatro) para "x" e substituindo-os na função **y = 4.x**. Lembrando que poderíamos atribuir qualquer valor para "x" para obtermos o gráfico, assim:

Exemplo 1:

y = 4.x

x	y = 4.x	(x,y)
0	0	(0,0)
1	4	(1,4)

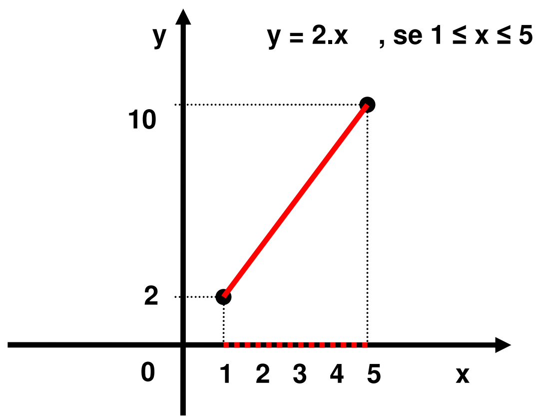


D(f) = – ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = – ∞ < y < + ∞ ou R

Exemplo 2:

y = 2.x , se 1 ≤ x ≤ 5

x	y = 2.x	(x,y)
1	2	(1,2)
5	10	(5,10)



D(f) = 1 ≤ x ≤ 5
Im(f) = 2 ≤ y ≤ 10

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) f(x) = – 3.x **02)** $f(x) = \frac{x}{2}$ **03)** $f(x) = -\frac{x}{3}$

04) f(x) = 2,5.x **05)** f(x) = 6,2.x **06)** f(x) = 3.x

FUNÇÃO LINEAR AFIM:

y = A.x + B ou f(x) = A.x + B

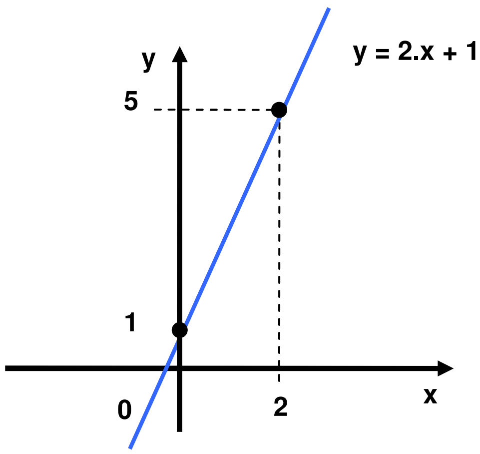
É a função *f* dada por ***y = A.x + B***, com x Є R e A e B números reais não nulos (zero).

A representação gráfica da função linear afim é uma reta pelo ponto (x=0, y=B), ou seja, **o valor do número real B, sempre será um ponto, que deverá ser marcado em cima da reta do y**. Sendo assim, necessitamos de mais um ponto para a construção da reta.

Exemplo 1:

y = 2.x + 1

x	y = 2.x + 1	(x,y)
0	1	**(0,1)**
2	5	**(2,5)**



A > 0 = Função Crescente

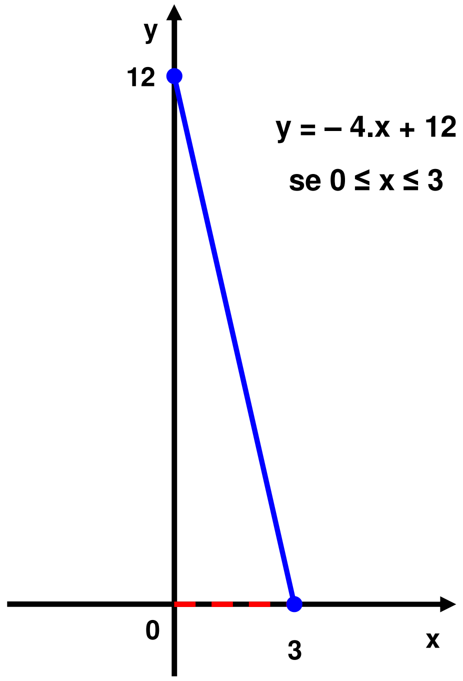
D(f) = – ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = – ∞ < y < + ∞ ou R

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

Exemplo 2:

y = – 4.x + 12 , se 0 ≤ x ≤ 3

x	y = – 4.x + 12	(x,y)
0	12	(0,12)
3	0	(3,0)



A < 0 = Função Decrescente

D(f) = 0 ≤ x ≤ 3
Im(f) = 0 ≤ y ≤ 12

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) f(x) = – 3.x + 1
02) f(x) = 2.x + 7
03) $f(x) = \frac{1}{2}.x + 4$
04) f(x) = 2.x – 4
05) f(x) = 10 – 2.x
06) f(x) = 0,6.x – 3
07) f(x) = 2.x – 1
08) f(x) = – 3.x + 2
09) f(x) = 4.x – 1
10) f(x) = – 2.x – 3
11) $f(x) = \frac{x}{2} - 1$
12) f(x) = – x + 3
13) f(x) = 6.x – 5
14) f(x) = – 3.x + 2

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

"y" variável dependente

"x" variável independente

y = A.x + B

"B" identifica o ponto de intersecção da reta com o eixo y, é chamado coeficiente linear.

"A" é a variação em y para cada aumento unitário em x, é chamado coeficiente angular da reta.

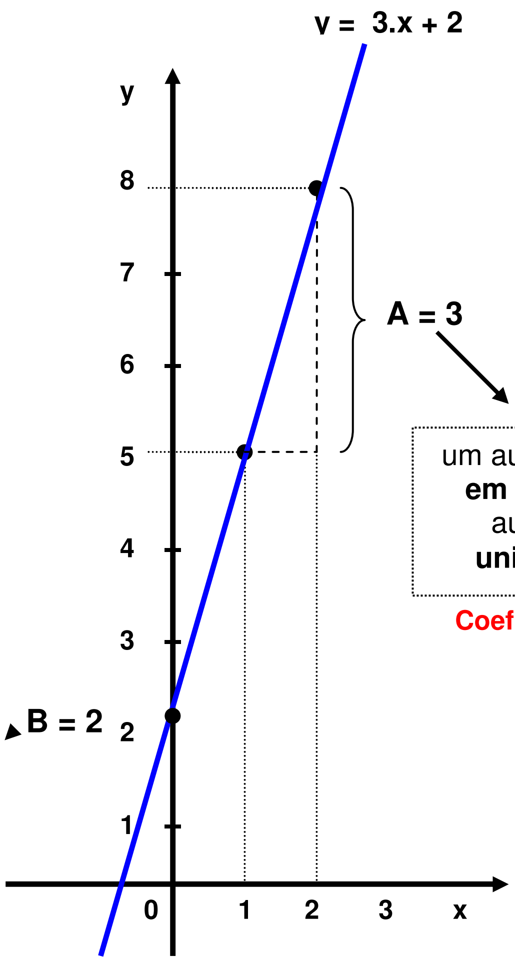
Exemplo:

y = 3.x + 2

x	**y = 3.x + 2**	**(x,y)**
1	5	**(1,5)**
2	8	**(2,8)**

Coeficiente Linear

Ponto de intersecção com o eixo **y**



um aumento **unitário em x** acarreta um aumento de **3 unidades em y**.

Coeficiente Angular

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

Atividades Práticas

01) Calcular a equação de uma reta y = A.x + B, que contém os pontos $P_1(1,5)$ e $P_2(3,13)$.

02) Calcular a equação da reta que contém o ponto P(3,8) e tem inclinação A = – 2.

03) Escrever a equação da reta que contém os pontos:

a) $\begin{cases} P_1 = (2, 10) \\ P_2 = (8, 1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} P_1 = (0, 20) \\ P_2 = (12, 0) \end{cases}$

c) $\begin{cases} P_1 = (0, 50) \\ P_2 = (8, 0) \end{cases}$

04) Escrever a equação da reta que contém o ponto P e tem declividade A:

a) $\begin{cases} P = (0, 20) \\ A = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} P = (8, 8) \\ A = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} P = (-2, 1) \\ A = 5 \end{cases}$

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

<u>FUNÇÃO CONSTANTE</u>:

$$\boxed{y = k \quad \text{ou} \quad f(x) = k}$$

Seja ***k*** um número real qualquer. A função *f* definida em R e tal que $y = f(x) = k$, recebe o nome de função constante, portanto, o valor de *y* não varia com o aumento de x.

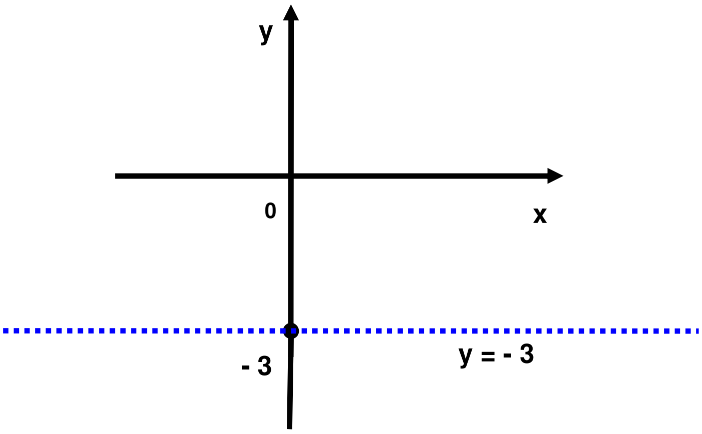
A representação gráfica de uma função constante é sempre uma **reta paralela** ou coincidente com o eixo x (abscissas), passando pelo ponto (0 , y).

Exemplo 1:

$y = -3$

ou

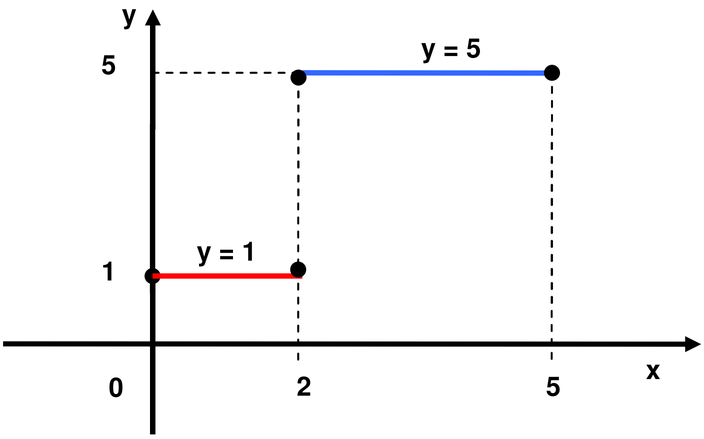
$f(x) = -3$



D(f) = – ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = – 3

Exemplo 2:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 5, & \text{se } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$



Nota: É importante observarmos que temos 2 (funções) constantes e cada uma delas é delimitada em cima do eixo "x" de acordo com seu ***Domínio***, ou seja, a primeira função "y = 1", está em cima do eixo "x" sobre o intervalo de 0 (zero) até 2 (dois) e a segunda função "y = 5", está em cima do eixo "x" sobre o intervalo de 2 (dois) até 5 (cinco). Esses intervalos que delimitam as funções, estabelecendo fronteiras, são chamados de ***Domínio*** da função.

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) f(x) = + 1

02) f(x) = – 3

03) f(x) = – 7

04) f(x) = ½

05) f(x) = 0

06) $y = \begin{cases} 1, se \ \ 0 \leq x \leq 2 \\ 5, se \ \ 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

07) f(x) = 2

08) $y = \begin{cases} 2, se \ \ x \leq -1 \\ 1, se \ \ -1 < x \leq 3 \\ 6, se \ \ x > 3 \end{cases}$

FUNÇÕES DEFINIDAS POR VÁRIAS SENTENÇAS:

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) $f(x) = \begin{cases} 4, se \ \ x \leq 3 \\ -x + 7, se \ \ x > 3 \end{cases}$

02) $f(x) = \begin{cases} -1, se \ \ x \leq 1 \\ x, se \ \ x > 1 \end{cases}$

03) $f(x) = \begin{cases} x + 2, se \ \ x \leq 1 \\ 2x + 1, se \ \ x > 1 \end{cases}$

04) $f(x) = \begin{cases} -x, se \ \ x < -1 \\ 0, se \ \ -1 \leq x \leq 1 \\ x, se \ \ x > 1 \end{cases}$

05) $f(x) = \begin{cases} x + 1, se \ \ x \leq 1 \\ 3, se \ \ x > 1 \end{cases}$

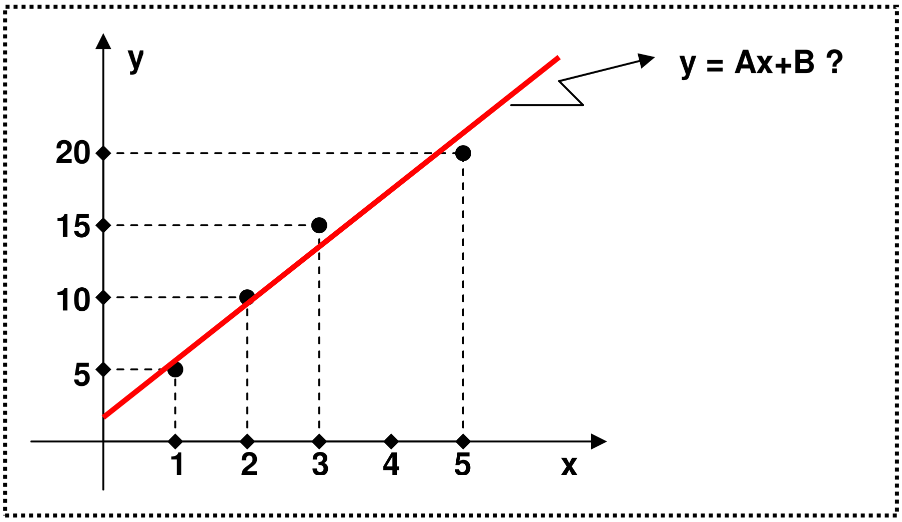
06) $f(x) = \begin{cases} x + 1, se \ \ x < 0 \\ (x-1)^2, se \ \ x \geq 0 \end{cases}$

07) $f(x) = \begin{cases} x - 2, se \ \ x \leq 0 \\ x + 2, se \ \ 0 < x \leq 3 \\ 1, se \ \ x > 3 \end{cases}$

08) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, se \ \ x \leq 0 \\ x^2 + 1, se \ \ x > 0 \end{cases}$

CRITÉRIO DOS MÍNIMOS QUADRADOS: EQUAÇÃO DA RETA QUE APROXIMA UM CONJUNTO DE PONTOS NO PLANO.

EXEMPLO: Construir a equação y = Ax + B de uma reta que aproxima um conjunto de pontos: P_1= (1 , 5), P_2= (2 , 10), P_3= (4 , 12) e P_4= (5 , 17).



Fórmula dos Mínimos Quadrados:

y = A.x + B

$$
\begin{cases}
A = \dfrac{\sum x \, . \, y - n \, . \, \bar{x} \, . \, \bar{y}}{\sum x^2 - n \, . \left(\bar{x} \right)^2} \\
e \\
B = \bar{y} - A \, . \, \bar{x}
\end{cases}
$$

onde:

Σxy = Soma dos produtos (multiplicações) x.y

n = Número de pontos observados

Σx^2 = Soma dos quadrados dos valores de x

$\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$ e $\bar{y} = \dfrac{\sum y}{n}$ **Médias Aritméticas**

Organizando os cálculos em uma tabela:

n	(x , y)	x	y	x.y	x^2
1	(1 , 5)	1	5	5	1
2	(2, 10)	2	10	20	4
3	(4 , 12)	4	12	48	16
4	(5 , 17)	5	17	85	25
Soma = Σ		12	44	158	46

Encontrando as médias aritméticas de x e y:

$$n = 4$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{12}{4} \Leftrightarrow \bar{x} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{44}{4} \Leftrightarrow \bar{y} = 11$$

Substituindo na fórmula dos mínimos quadrados:

$$A = \frac{\sum x.y - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum x^2 - n.\left(\bar{x}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{158 - 4.3.11}{46 - 4.3^2} \Leftrightarrow \frac{158 - 132}{46 - 36} \Leftrightarrow \frac{26}{10} \Leftrightarrow a = 2,6$$

e

$$B = \bar{y} - A.\bar{x} \Leftrightarrow 11 - 2,6.3 \Leftrightarrow 11 - 7,8 \Leftrightarrow B = 3,2$$

y = A.x + B

$\boxed{\mathbf{y = 2,6.x + 3,2}}$ **→ equação procurada**

Obs: A equação y = 2,6.x + 3,2 representa a RETA que se aproxima do conjunto de pontos dados "aleatoriamente".

ATIVIDADES PRÁTICAS

Escrever a equação da reta que aproxima o conjunto de pontos dados, usando o critério dos mínimos quadrados.

a. **P_1= (0 , 0), P_2= (2 , 5), P_3= (3 , 8) e P_4= (4 , 9)** **Resposta: y = 2,3.x + 0,2**
b. **P_1= (-1 , 0), P_2= (0 , 2), P_3= (1 , 3), P_4=(2 , 6) e P_5= (3 , 5)** **Resposta: y = 1,4.x + 1,8**
c. **P_1=(0 , 20), P_2=(2 , 12), P_3=(4 , 7), P_4=(6 , 3) e P_5=(8 ; 0,5)** **Resposta: y = -2,4.x + 18,1**
d. **P_1= (1 , 20), P_2= (5 , 40), P_3= (10 , 70) e P_4= (15 , 90)** **Resposta: y = 5,1.x + 15,5**

FUNÇÕES DO 2º GRAU OU FUNÇÃO QUADRÁTICA:

$$\boxed{y = A.x^2 + B.x + C \quad \text{ou} \quad f(x) = A.x^2 + B.x + C}$$

É a função *f* definida por $y = A.x^2 + B.x + C$, com x Є R e onde A, B e C são números reais quaisquer, com A ≠ 0.

O gráfico da função quadrática é uma parábola que tem **concavidade** voltada **para cima**, caso **A** seja **positivo**, e **concavidade** voltada **para baixo**, caso **A** seja **negativo**.

Exemplos: $y = 3.x^2 + 14.x + 5$ ou $y = -2.x^2 + 18$

CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA:

A parábola fica bem caracterizada quando conhecemos seu cruzamento com os eixos x e y, e seu vértice. O vértice da parábola posiciona seu eixo de simetria vertical.

Os pontos principais são:

a. Cruzamento com o eixo Ox.

São as raízes (soluções x_1 e x_2) da equação do 2º Grau $A.x^2 + B.x + C = 0$

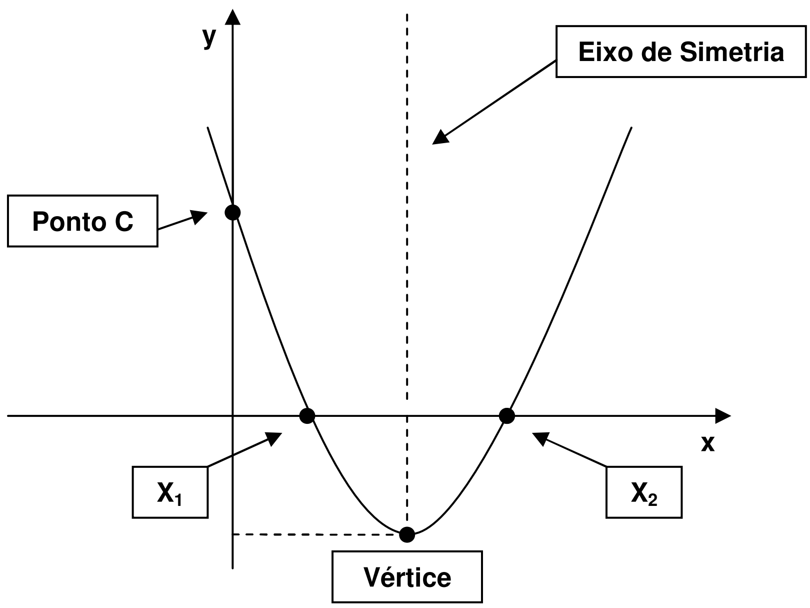
b. Cruzamento com o eixo Oy.

É o ponto correspondente a x = 0, onde y = C.

c. Vértice, corresponde ao ponto

$$\boxed{X_v = \frac{-B}{2.A} \; ; \quad Y_v = \frac{-\Delta}{4.A}}$$

ESQUEMA GRÁFICO COM OS PONTOS PRINCIPAIS:



Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

Exemplo:

Construir a representação gráfica da função quadrática $y = x^2 - 5x + 6$

Resolução:

a. Cruzamento com eixo x é o resultado da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 6 = 0$

Então: A = 1, B = – 5 e C = 6

$\Delta = B^2 - 4.A.C \rightarrow (-5)^2 - 4.1.6 \rightarrow 25 - 24 \rightarrow \Delta = 1$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2.A} \Rightarrow \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} \Rightarrow \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5+1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3 \\ \frac{5-1}{2} \Leftrightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

A parábola cruza o eixo x nos pontos (2 , 0) e (3 , 0).

b. Cruzamento com o eixo y é o ponto (0, C), ou seja:

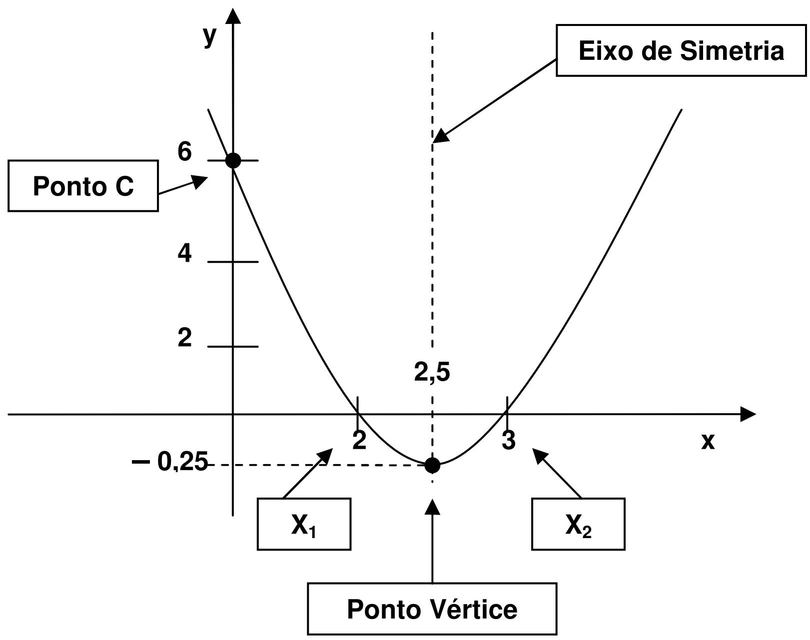
A parábola cruza o eixo y no ponto **(0 , 6)**

c. Vértice da parábola

$$\mathbf{Xv} = \frac{-B}{2.A} \rightarrow \frac{-(-5)}{2.1} \rightarrow \frac{5}{2} \rightarrow 2{,}5$$

$$\mathbf{Yv} = \frac{-\Delta}{4.A} \rightarrow \frac{-1}{4.1} \rightarrow \frac{-1}{4} \rightarrow -0{,}25$$

O vértice da parábola tem coordenadas **PV = (2,5 ; - 0,25).**



D(f) = – ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = – 0,25 ≤ y < +∞ ou [- 0,25 ; +∞[

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) f(x) = $x^2 - 4.x + 3$ **02)** f(x) = $-x^2 + 10.x - 16$

03) f(x) = $x^2 + x - 2$ **04)** f(x) = $-x^2 + 3.x + 4$

05) f(x) = $-x^2 + 2.x + 7$

FUNÇÃO CÚBICA:

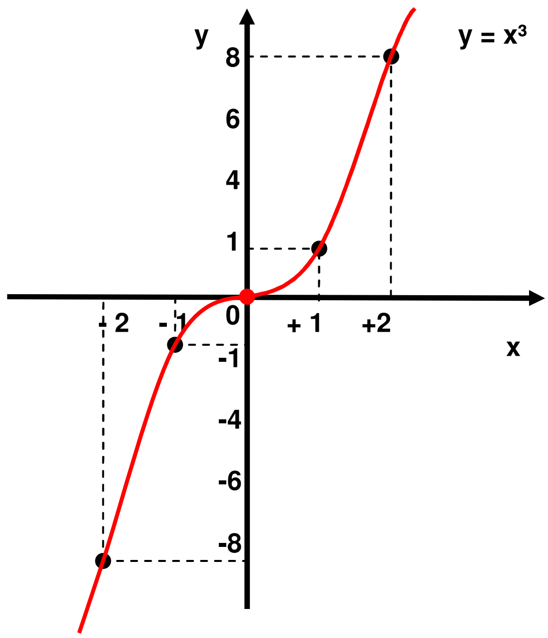
$$\boxed{y = A.x^3 + B.x^2 + C.x + D \quad \text{ou} \quad f(x) = A.x^3 + B.x^2 + C.x + D}$$

Sejam ***A, B, C*** e ***D*** números reais, sendo ***A*** não nulo. A função cúbica é uma função *f:R→R* que para cada x em R, associa $y = A.x^3 + B.x^2 + C.x + D$ **ou** $f(x) = A.x^3 + B.x^2 + C.x + D$.

Exemplo:

y = x^3

x	$y = x^3$	(x,y)
- 2	- 8	**(-2,-8)**
- 1	- 1	**(-1,-1)**
0	0	**(0, 0)**
+ 1	+ 1	**(+1,+1)**
+ 2	+ 8	**(+2,+8)**



D(f) = $-\infty < x < +\infty$ ou R
Im(f) = $-\infty < y < +\infty$ ou R

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) f(x) = $-4.x^3$ **02)** f(x) = $2.x^3 + x^2 - 4x + 3$

03) f(x) = $-7x^3 + x^2 + 2x + 7$

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

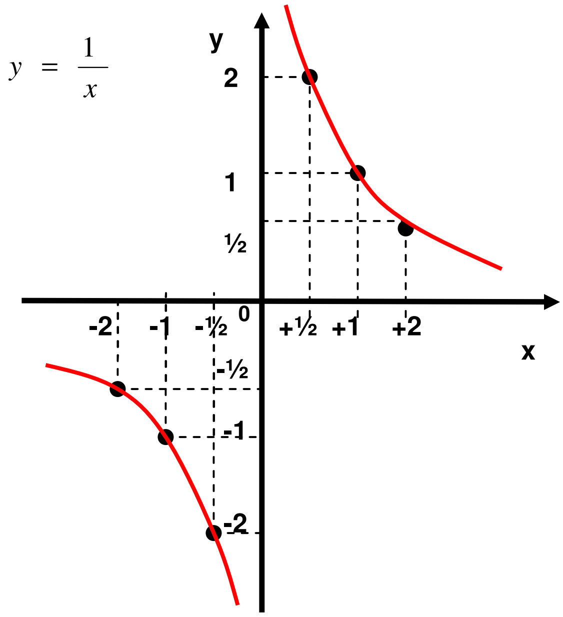
FUNÇÃO RACIONAL:

Definição: *f: R* → R**

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad com \quad x \neq 0$$

Exemplo: $y = \frac{1}{x}$

x	$y = \frac{1}{x}$	(x,y)
- 2	- ½	**(-2,-½)**
- 1	- 1	**(-1,-1)**
- ½	- 2	**(-½,-2)**
½	+ 2	**(½,+2)**
+ 1	+ 1	**(+1,+1)**
+ 2	+ ½	**(+2,+½)**



D(f) = R*
Im(f) = R*

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) f(x) = $\frac{1 + 3x}{x}$

02) f(x) = $\frac{1}{x^2}$

03) f(x) = $\frac{x^2 - 1}{(x^2 - 1).(x^2 - 4)}$

04) f(x) = $\frac{x^2 + 2}{x + 1}$

FUNÇÃO IRRACIONAL:

Quando é extraído a raiz de um polinômio, passa-se das funções racionais para a classe das funções algébricas.

Exemplos: **a)** $f(x) = \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = x + \sqrt[5]{x - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

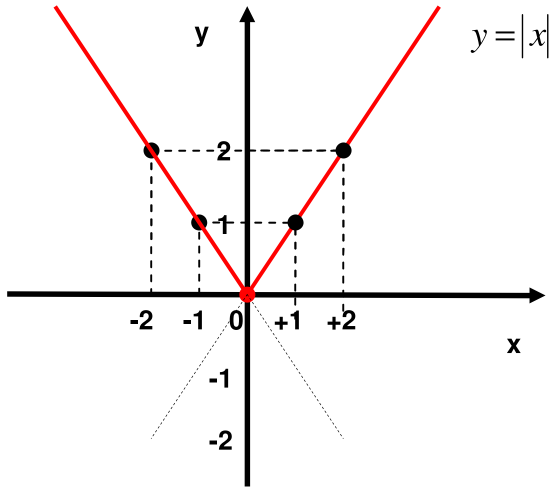
FUNÇÃO MODULAR:

Definição: $f: R \to R$

$$f(x) = |x|$$

Exemplo: $y = |x|$

x	$y = \|x\|$	(x,y)
- 2	+ 2	**(-2,+2)**
- 1	+ 1	**(-1,+1)**
0	0	**(0, 0)**
+ 1	+ 1	**(+1,+1)**
+ 2	+ 2	**(+2,+2)**



D(f) = $-\infty < x < +\infty$ ou R
Im(f) = $0 \leq y < +\infty$ ou $[0,+\infty[$ ou R_+

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) f(x) $= |x - 3|$

02) f(x) $= |x + 2|$

03) f(x) $= -|3x|$

04) f(x) $= -|x|$

05) f(x) $= |1 - x|$

06) f(x) $= |x| + 1$

07) f(x) $= |x| + |x + 2|$

08) f(x) $= |x - 1| - 1$

FUNÇÃO INVERSA:

A Função inversa de f, que é indicada por f^{-1}, define uma correspondência contrária, isto é, de y para x, e indicamos: $x = f^{-1}(y)$

As funções onde isso ocorre são denominadas funções bijetoras e são chamadas de funções inversíveis.

ATIVIDADES PRÁTICAS

Determine a função inversa das seguintes funções:

01) f(x) = $5.x - 3$

02) f(x) = x^3

03) f(x) $= \dfrac{x+2}{4}$

04) f(x) $= \dfrac{2x-2}{4x+3}$

05) f(x) = x^2

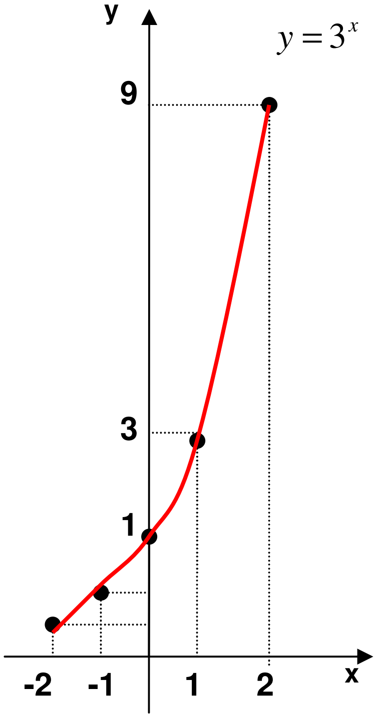
06) f(x) $= \dfrac{x}{7}$

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função f: R → R dada por **$f(x) = a^x$** (com a ≠ 1 e a > 0) é denominada função exponencial de base a e definida para todo x real.

EXEMPLO 1: $f(x) = 3^x$

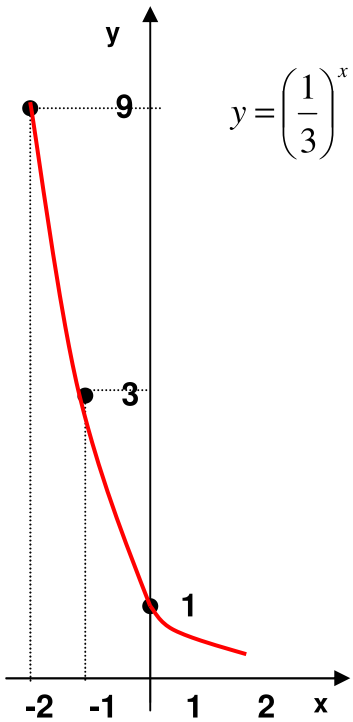


NA TABELA:

x	$y = 3^x$
-2	0,1
-1	0,3
0	1
1	3
2	9

D(f) = – ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = 0 < y < +∞ ou]0,+∞[ou R^*_+

EXEMPLO 2: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



NA TABELA:

x	$y = 1/3^x$
-2	9
-1	3
0	1
1	0,3
2	0,1

D(f) = – ∞ < x < + ∞ ou R
Im(f) = 0 < y < +∞ ou]0,+∞[ou R^*_+

Pelos exemplos dados, podemos observar que:

- **$f(x) = a^x$ é crescente quando a > 1**
- **$f(x) = a^x$ é decrescente quando 0 < a < 1**

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):
Em todos os casos o intervalo do **Domínio é [-2 , +2]**.

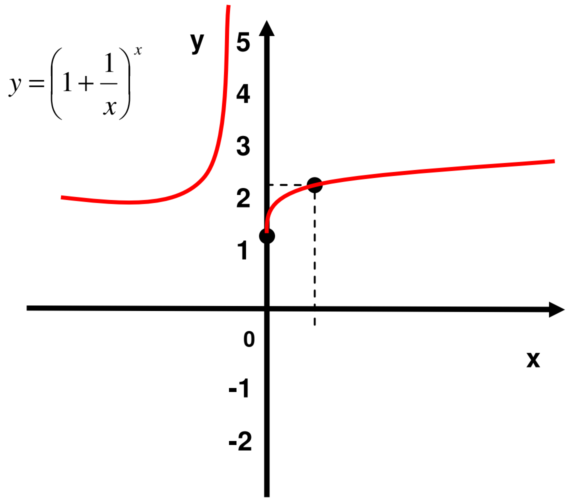
01) $y = 2^x$ **02)** $y = 3^{x+1}$ **03)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **04)** $y = 3^x + 1$

FUNÇÃO EXPONENCIAL e^x

A função exponencial mais importante para a modelagem de fenômenos naturais, físicos e econômicos é a função exponencial natural cuja base é o famoso número "e", que vale 2,718281828 para nove casas decimais. Podemos definir "e" como o número para o qual tende a função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando "x" cresce indefinidamente.

Exemplo: $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

x	$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
-1,5	5,1962
-2	4,0000
-100	2,732
0	1
1000	2,7169
2000	2,7176
3000	2,7178



FUNÇÕES LOGARÍTMICAS:

Conceito de Logaritmo

Princípios básicos dos logaritmos → **transformar uma multiplicação em adição** ou **uma divisão em subtração.**

Após 20 anos de trabalho, o escocês John Napier (1550-1617), formalizou a teoria dos logaritmos com a publicação das obras "*Descrição das Normas dos Logaritmos Maravilhosos*", em 1614, e "*Cálculo das Normas dos Logaritmos Maravilhosos"*, em 1619, cuja finalidade é simplificar cálculos numéricos.

Para compreender o que é um logaritmo, considere uma potência de base positiva e diferente de 1. Por exemplo, $2^3 = 8$. Ao **expoente** dessa potência damos o nome de **logaritmo**. Dizemos que 3 é o logaritmo de 8 na base 2. Em símbolos:

$2^3 = 8 \iff \log_2 8 = 3$

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

Definição

O logaritmo de um número real e positivo **b**, na base **a**, positiva e diferente de 1, é o número x ao qual se deve elevar a para se obter b.

$$\underbrace{\log_a b = x}_{\text{forma logarítmica}} \iff \underbrace{a^x = b}_{\text{forma exponencial}}$$

Condição de Existência:

com $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

Na forma logarítmica	Na forma exponencial
$\log_a b = x$ $\begin{cases} a = \text{base do logaritmo} \\ b = \text{logaritmando} \\ x = \text{logaritmo} \end{cases}$	$a^x = b$ $\begin{cases} a = \text{base da potência} \\ b = \text{potência} \\ x = \text{expoente} \end{cases}$

Observação:

Aos logaritmos que se indicam $\log_a b$ chamamos de **sistema de logaritmos de base a**. Existe uma infinidade de sistemas de logaritmos. Dentre todos os sistemas, o mais importante é o **sistema de logaritmos decimais**, ou de base 10. Indica-se: $\log_{10} x$ ou $\log x$. Quando o sistema é de base 10, é comum omitir-se a base na sua representação.

<u>**Resolução de equações logarítmicas**</u>:

a) $\log_2 16 = x$ é o expoente x tal que $\mathbf{2^x = 16}$

Então, temos:

$2^x = 2^4$ (transformando a equação dada em igualdade de mesma base)

$x = 4$ (com as bases iguais, igualam-se os expoentes)

$\log_2 16 = 4$

A Base 10

Os logaritmos que tem base 10 são chamados ***logaritmos decimais***, ou de Briggs (1561-1630), e são os mais utilizados. Sua base não é escrita, e indicamos, simplesmente, $\boldsymbol{\log b}$. De acordo com a criação de Napier e Briggs, podemos escrever qualquer número na forma de potências de 10 ou descobrir o valor de qualquer potência de 10.

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

Podemos escrever o número 2 na forma de potência de base 10, **$2 = 10^{0,30103}$**, ou determinar o valor de $10^{1,17609}$, que é aproximadamente 15.

Esses expoentes fazem parte de uma tabela que foi elaborada por Napier e Briggs. Eles demoraram cerca de 30 anos para construí-la. Essa tabela, conhecida como tábua de logaritmos, foi usada até há pouco tempo. Atualmente, usamos a calculadora para determinar logaritmos.

Mudança de base:

Suponha que apareçam bases diferentes e que precisemos reduzir os logaritmos de bases diferentes para uma base conveniente.

Essa operação é chamada mudança de base. Veja como funciona.

Dado ***$\log_a b$***, vamos indicá-lo em outra ***base c***, temos então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

A expressão acima mostra como se efetua a mudança de um logaritmo de base a para um logaritmo de base c (arbitrária).

Exemplo:

Dados: $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,4$, calcule $\log_2 3$

Resolução:

Como $\log 2$ e $\log 3$ estão na base 10, vamos passar $\log_2 3$ para a base 10.

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,4}{0,3} = 1,33$$

Casos especiais:

1. Se a base do logaritmo é igual a 10, dizemos que y é o logaritmo decimal de x e denotamos: **y = *log* (x)**.
2. Se a base do logaritmo é igual a **"*e*"** (*aproximadamente 2,718281*), dizemos que y é o logaritmo natural de x e denotamos **y = *ln* (x)**.

Tendo em vista o desenvolvimento das calculadoras eletrônicas, passaremos a utilizar sempre a base **"*e*"**.

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

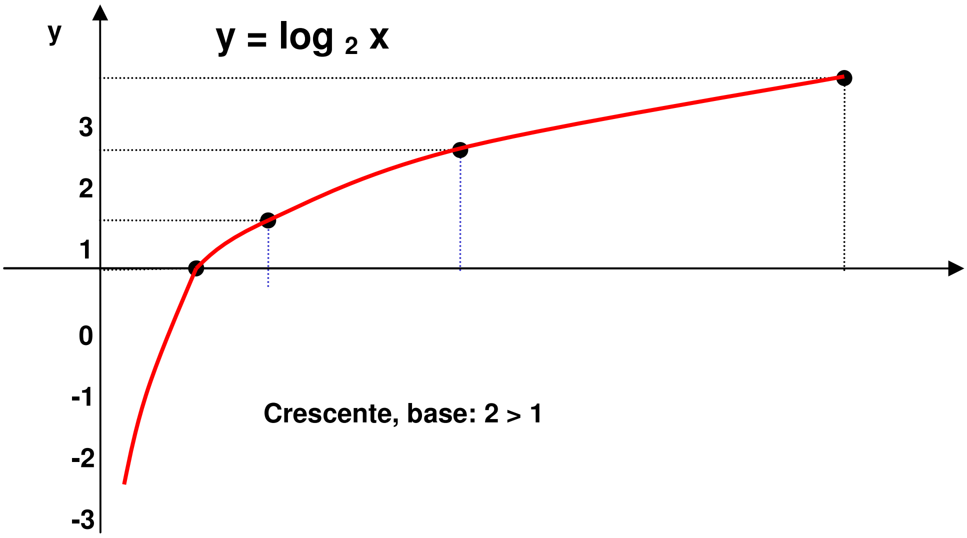
Gráfico da função logarítmica:

Devemos lembrar que, para existir o logaritmo, é preciso que x > 0.

01) Construa o gráfico da função logarítmica **$y = \log_2 x$**

Atribuindo valores para x, obtemos a tabela e o gráfico a seguir:

x	y
1/8	– 3
1/4	– 2
1/2	– 1
1	0
2	1
4	2
8	3

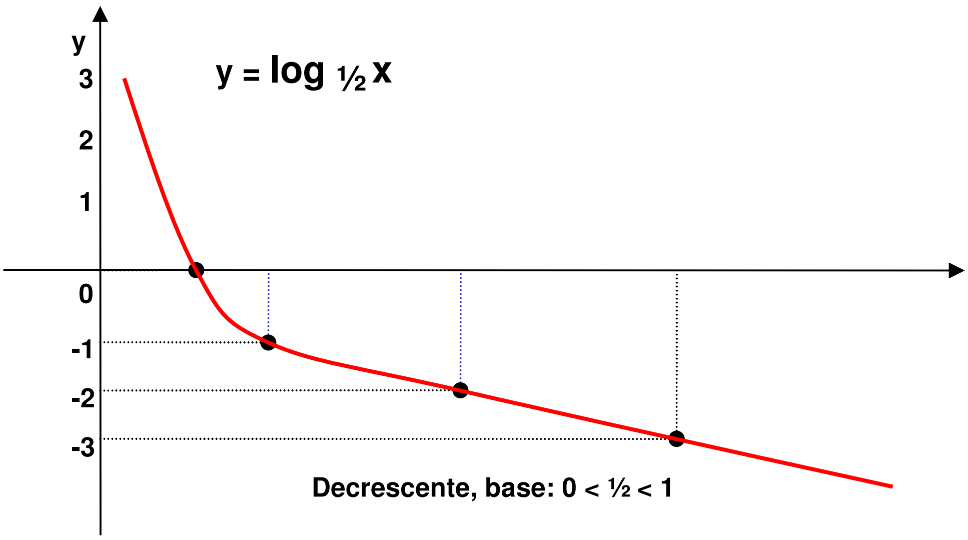


D(f) = $0 < x < +\infty$ ou $]0,+\infty[$ ou R^*_+
Im(f) = $-\infty < x < +\infty$ ou R

02) Construa o gráfico da função logarítmica **$y = \log_{1/2} x$**

Atribuindo valores para x, obtemos a tabela e o gráfico a seguir:

x	y
8	– 3
4	– 2
2	– 1
1	0
1/2	1
1/4	2
1/8	3



D(f) = $0 < x < +\infty$ ou $]0,+\infty[$ ou R^*_+
Im(f) = $-\infty < x < +\infty$ ou R

ATIVIDADES PRÁTICAS

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f):

01) $y = \log_3 {}^{x}$ **02)** $y = \log_2 {}^{(x-1)}$ **03)** $y = \log_4 {}^{x}$ **04)** $y = \log_{1/4} {}^{x}$

FUNÇÃO COMPOSTA:

Dadas as funções f: A → B e g: B → C, a composta f com g, denotada por "gof", é função definida por gof(x) = g(f(x)).

Exemplos: f: A → B definida por f(x)= 2x

g: B → C definida por $g(x) = x^2$

Resolução: $g(f(x)) = x^2$

$g(2x) = (2x)^2$

$g(f(x)) = 4x^2$

Então, podemos afirmar que vai existir uma função h de A em C definida por $h(x)=4x^2$, que indicamos por gof ou g(f(x)) (lê-se: g composta com f).

ATIVIDADES PRÁTICAS

01) Dados $f(x) = x^2 – 4$ e g(x) = 2x + 1, Calcule f(g(x)) e g(f(x)).

02) Se f(x) = 5x – 2 e h(x) = 2 – 3x, calcule f(f(x)) e h(h(x)).

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS:

Funções que estão associadas a ângulos e retas. Elas são importantes no equacionamento de situações práticas que tenham caráter periódico.

Valores de funções trigonométricas para alguns ângulos:

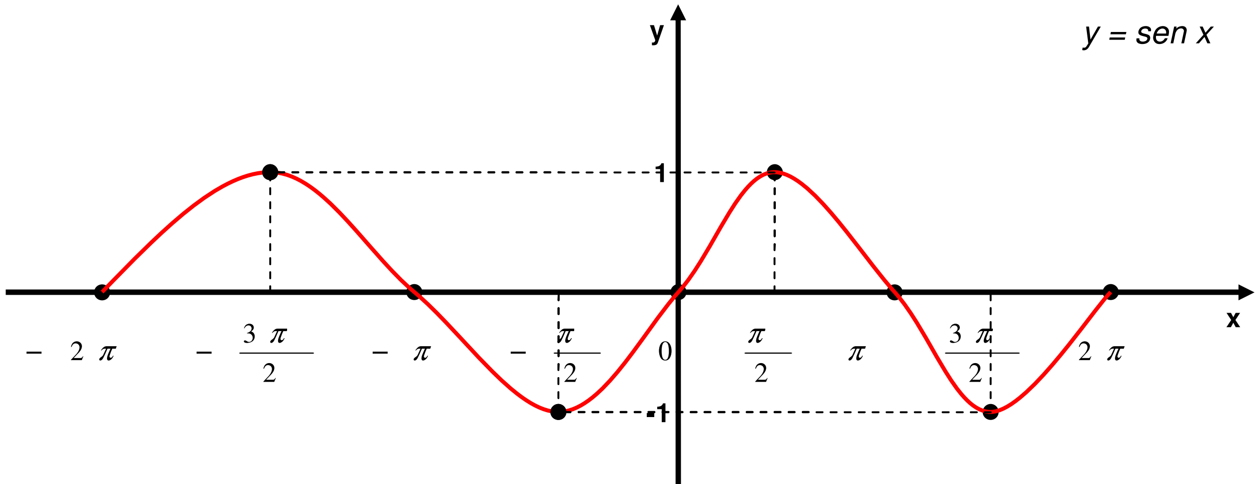
Graus	-180º	-135º	-90º	-45º	0º	30º	45º	60º	90º	135º	180º
θ (radianos)	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$sen\,\theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$tg\,\theta$	0	1	–	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	-1	0

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

FUNÇÃO SENO:

A função seno é definida como **sen: R → R**

x → sen(x)



D (sen) =] -∞, +∞ [

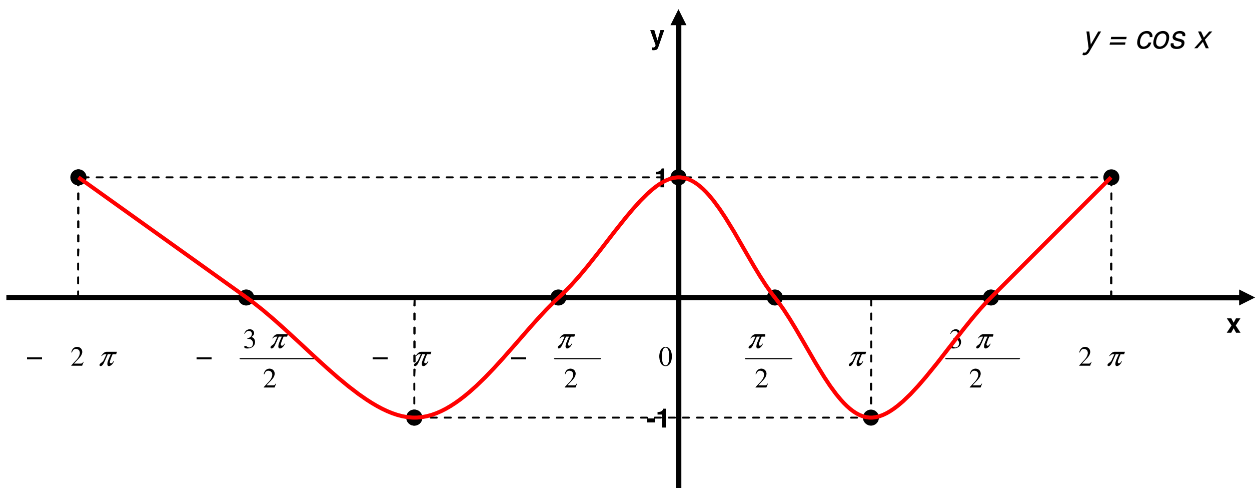
Im (sen) = [– 1, + 1]

Período = 2.π

FUNÇÃO COSSENO:

A função cosseno é definida como **cos: R → R**

x → cos(x)



D (sen) =] -∞, +∞ [

Im (sen) = [– 1, + 1]

Período = 2.π

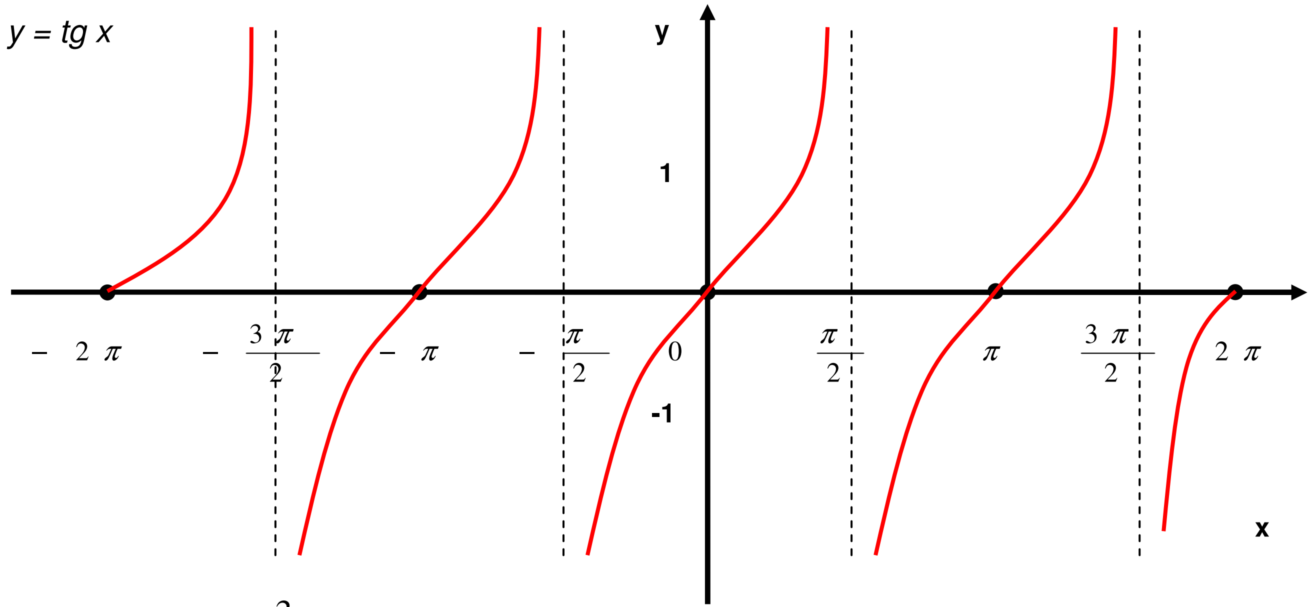
Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

FUNÇÃO TANGENTE:

A função tangente é definida como sendo o quociente da função seno pela função cosseno.

tg: A → R

x → tg(x) = $\frac{sen(x)}{\cos(x)}$



D (tg): $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Im (sen) = -∞ < y < +∞

Período = π

ALGUMAS FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS:

FUNÇÃO ARCO-SENO

A função **f: R → [–1 ; 1]** definida por **f(x) = sen x** não é bijetora. Entretanto, restringindo o domínio ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, obtemos uma função bijetora cuja inversa denominamos ***função arco-seno***.

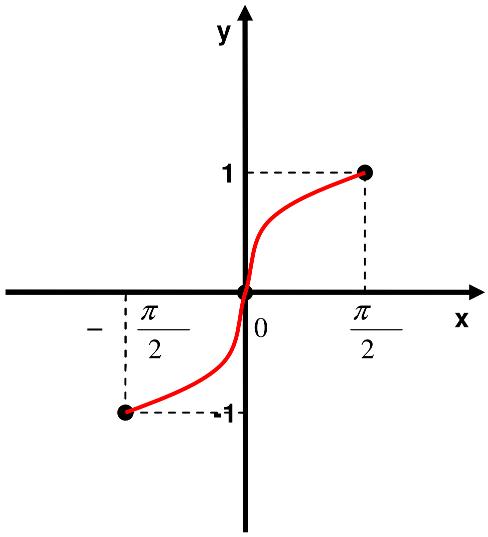
Temos, para x Є $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ e y Є [– 1 ; 1]:

sen x = y ⇔ x = arcsen y

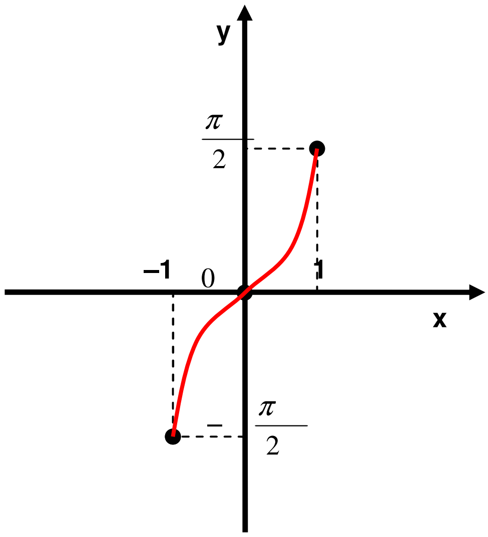
Trocando x por y, e y por x, temos y = arcsen x.

Portanto, a função inversa de f: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ **→ [– 1 ; 1], f(x) = sen x, é**

f^{-1}: [– 1 ; 1] → $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$**, $f^{-1}(x)$ = arcsen x**



y = sen x, x Є [-π/2 ; +π/2]



y = arcsen x

FUNÇÃO ARCO-COSSENO

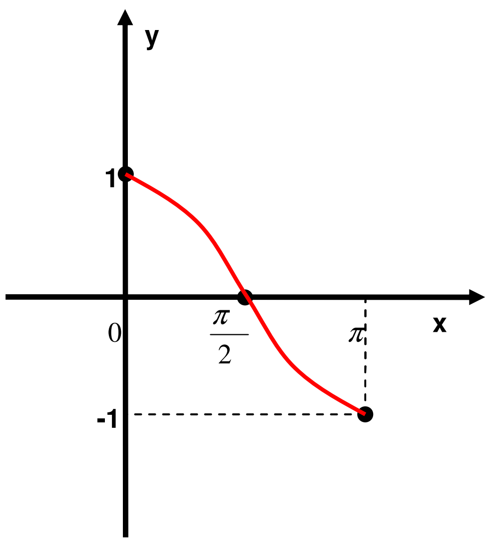
A função **f: [0 ; π] → [–1 ; 1]** definida por **f(x) = cos x**, restrição do cosseno ao intervalo **[0 ; π]**, é bijetora, e sua inversa é denominada ***função arco-cosseno***.

Temos, para x Є [0 ; π] e y Є [–1 ; 1]:

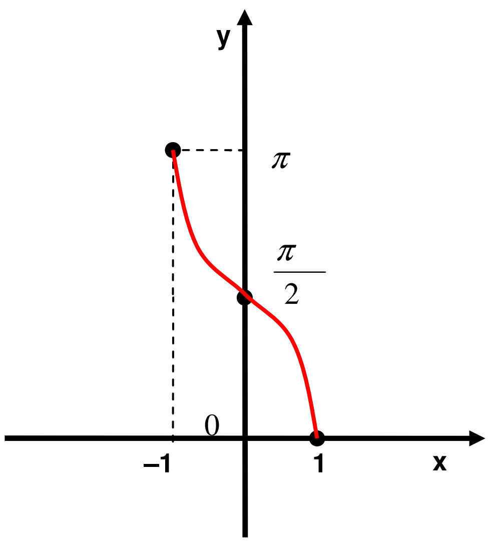
cos x = y ⇔ x = arccos y

Trocando x por y, e y por x, temos y = arccos x.

Portanto, a função inversa de f é f^{-1} : [– 1 ; 1] → [0 ; π], f^{-1}(x) = arccos x



y = cos x, x Є [0 ; π]



y = arccos x

Prof.Ms.Carlos Henrique – Email: carloshjc@yahoo.com.br

FUNÇÃO ARCO-TANGENTE

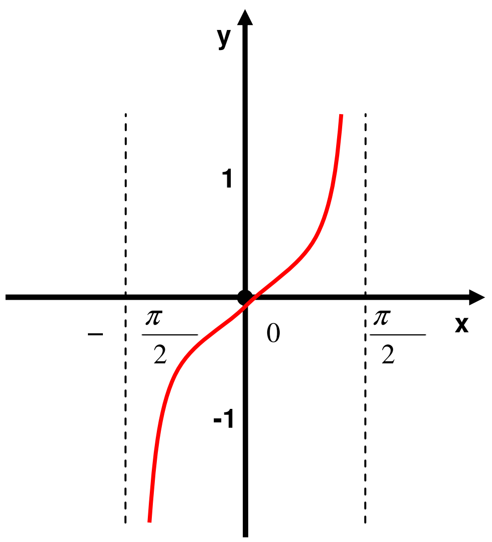
A função **f:** $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ → **R** definida por **f(x) = tg x**, restrição da tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, é bijetora e sua inversa é denominada ***função arco-tangente***.

Temos, para x Є $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e y Є R:

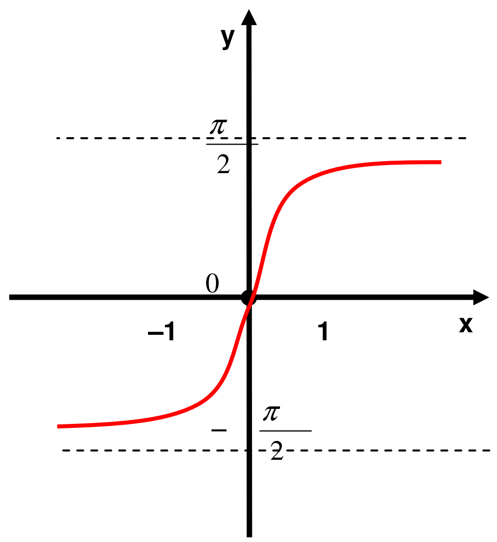
$$\textbf{tg } x = y \Leftrightarrow x = \textbf{arctg } y$$

Trocando x por y, e y por x, temos y = arctg x.

Portanto, a função inversa de f é f^{-1} : R → $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, f^{-1}(x) = arctg x



y = tg x, x Є] -π/2 ; +π/2 [



y = arctg x

BIBLIOGRAFIA:

DOWLING, E. T. Matemática Aplicada a Economia e Administração. São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1981.

GIOVANNI, J. R. Matemática Fundamental: 2º Grau: Volume Único. São Paulo: FTD, 1994.

GOLDSTEIN, L. J. Matemática Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

LEITHOLD, L. Matemática Aplicada a Economia e Administração. São Paulo: Harbra, 2001.

MACHADO, A.S. Matemática Temas e Metas: 6 – Funções e Derivadas. São Paulo: Atual, 1988.

SILVA, S. M. Matemática: Para os Cursos de Economia, Administração, Ciências Contábeis. 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999.

SILVA, S.M. Matemática Básica para Cursos Superiores. São Paulo: Atlas, 2002.