INTEGRAÇÃO

INTRODUÇÃO:

Cada regra de diferenciação tem uma regra correspondente de integração. Por exemplo, a Regra da Substituição para integração corresponde à Regra da Cadeia para diferenciação. A regra que corresponde à Regra do Produto para diferenciação é chamada de integração por partes.

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO OU MUDANÇA DE VARIÁVEL PARA INTEGRAÇÃO

Algumas vezes, é possível determinar a integral de uma dada função, aplicando uma das fórmulas básicas **depois de ser feita uma mudança de variável**.

Na prática, devemos então definir uma função ***u = g(x)*** conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

EXEMPLOS: Calcular as integrais:

1) $\int \sqrt{3x+4}.dx$

Substituímos e calculamos a Derivada de:

$$\begin{cases} u = 3x + 4 \\ du = 3.dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{3} \end{cases}$$

Substituindo, temos:

$$\int \sqrt{3x+4}.dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \sqrt{u}.\frac{du}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\int u^{1/2}.du \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\int u^{1/2}.du^{2/2}$$

Aplicando a regra de integração:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}+c \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}.u^{3/2}+c \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{9}.u^{3/2}+c$$

Substituindo novamente:

$$\boxed{= \quad \frac{2}{9}.(3x+4)^{3/2}+c}$$

2) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}dx$

Substituímos e calculamos a Derivada de:

u = 1 + x^2

du = 2xdx ➔ $dx=\dfrac{du}{2x}$

Substituindo e simplificando, temos:

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{2x}{u}.\frac{du}{2x} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{du}{u}$$

Consultando a tabela de integração:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Substituindo novamente:

$$\boxed{= \ln\left|1+x^2\right| + C}$$

3) $\displaystyle\int sen^2x.\cos x.dx$

Substituímos e calculamos a Derivada de:

u = *sen* x

du = cosx.dx ➔ $dx=\dfrac{du}{\cos x}$

Substituindo e simplificando, temos:

$$\int sen^2x.\cos x.dx \quad\Leftrightarrow\quad \int u^2.\cos x.\frac{du}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad \int u^2.du$$

Aplicando a regra de integração:

$$= \frac{u^3}{3} + C$$

Substituindo novamente:

$$\boxed{= \frac{sen^3 x}{3} + C}$$

4) $\int sen\,(x+7).dx$

Substituímos e calculamos a Derivada de:

u = x + 7

du = dx

Substituindo, temos:

$$\int sen\,(x+7).dx \quad \Leftrightarrow \quad \int senu\;.du$$

Consultando a tabela de integração:

$$-\cos\,u + c$$

Substituindo novamente:

$$\boxed{= \quad -\cos(\,x+7\,)+c}$$

5) $\int \frac{dx}{(3x-5)^8}$

Substituímos e calculamos a Derivada de:

u = 3x – 5

du = 3.dx ➔ $dx = \frac{du}{3}$

Substituindo e simplificando, temos:

$$\int \frac{1}{(3x+5)^8}.dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{u^8}.\frac{du}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^8} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\int u^{-8}.du$$

Aplicando a regra de integração:

$$= \frac{1}{3}.\frac{u^{-7}}{-7} + c \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{21.u^7} + c$$

Substituindo novamente:

$$\boxed{= -\frac{1}{21.(3x-5)^7} + c}$$

ATIVIDADES PRÁTICAS:

Calcular as integrais abaixo utilizando o método da substituição:

01) $\int sen(5x-7).dx$	**Substituir: u = 5x – 7**	**Resposta:** $\frac{-\cos(5x-7)}{5}+c$
02) $\int \sqrt{5x-1}.dx$	**Substituir: u = 5x – 1**	**Resposta:** $\frac{2}{15}.(5x-1)^{3/2}+c$
03) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+5}}.dx$	**Substituir: u = $2x^2$ + 5**	**Resposta:** $\frac{1}{2}.\sqrt{2x^2+5}+c$
04) $\int senx.\sqrt{1-\cos x}.dx$	**Substituir: u = 1 – cosx**	**Resposta:** $\frac{2}{3}.(1-\cos x)^{3/2}+c$
05) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}}.dx$	**Substituir: u = x^2 – 1**	**Resposta:** $\frac{5}{8}.(x^2-1)^{4/5}+c$
06) $\int 5x.\sqrt{4-3x^2}.dx$	**Substituir: u = 4 – $3x^2$**	**Resposta:** $-\frac{5}{9}.(4-3x^2)^{3/2}+c$
07) $\int (2x^2+2x-3)^{10}.(2x+1).dx$	**Substituir: u = $2x^2$+2x–3**	**Resposta:** $\frac{1}{22}.(2x^2+2x-3)^{11}+c$
08) $\int sen^4 x.\cos x.dx$	**Substituir: u = senx**	**Resposta:** $\frac{sen^5 x}{5}+c$
09) $\int \frac{senx}{\cos^5 x}.dx$	**Substituir: u = cosx**	**Resposta:** $\frac{1}{4.\cos^4 x}+c$
10) $\int e^x.\cos(2e^x).dx$	**Substituir: u = 2.e^x**	**Resposta:** $\frac{1}{2}.sen\ 2e^x+c$

MÉTODO DA INTEGRAÇÃO POR PARTES

É um método que permite expressar a integral de um produto de funções em outra integral. A integração por partes pode ser vista como uma versão integrada da regra do produto.

$$\boxed{\int u\,.dv = uv - \int v\,.du}$$

Fórmula da Integração Por Partes.

EXEMPLOS:

$$\int u \;.\; dv$$

01) Calcular a Integral $\int x\,.\,\underbrace{senx dx}$

Por partes: $\begin{cases} u = x \\ du = dx \end{cases}$ **Derivar** $\qquad \begin{cases} dv = senx.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$ **Integrar**

$$\int u\,.dv = uv - \int v\,.du$$

$$\int x.senx\,.dx = x.(-\cos x) - \int -\cos x.dx$$

$$\int x.senx\,.dx = -x.\cos x + \int \cos x.dx$$

$$\int x.senx\,.dx = \boxed{-x.\cos x + senx + c}$$

02) Calcular a Integral $\int x.e^{-2x}.dx$

Por partes: $\begin{cases} u = x \\ du = dx \end{cases} \quad \begin{cases} dv = e^{-2x}.dx \\ v = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{cases}$ $\quad$ *regra no formulário* $: \int e^{kx}.dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + c$

$$\int u\,.dv = uv - \int v\,.du$$

$$\int x.e^{-2x}.dx = x.\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) - \int -\frac{e^{-2x}}{2}.dx$$

$$\int x.e^{-2x}.dx = \frac{-x.e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}.dx$$

$$\int x.e^{-2x}.dx = \frac{-x.e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{e^{-2x}}{-2} + C$$

$$\boxed{\int x.e^{-2x}.dx = \frac{-x.e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C}$$ **ou** $$\boxed{\int x.e^{-2x}.dx = -\frac{1}{2}.x.e^{-2x} - \frac{1}{4}.e^{-2x} + C}$$

03) Calcular a Integral $\int e^{2x}.senx.dx$

1ª Integração ***por partes:*** $\begin{cases} u = e^{2x} \\ du = 2e^{2x}.dx \end{cases}$ $\begin{cases} dv = senx.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\int u\,.dv \;=\; uv \;-\; \int v\,.du$$

$$\int e^{2x}.senx.dx = \quad e^{2x}.(-\cos x) - \int -\cos x.2e^{2x}.dx$$

Aplicar nova Integração por Partes.

$$\int e^{2x}.senx.dx = \quad -e^{2x}.\cos x + 2.\left(\int e^{2x}.\cos x.dx\right)$$

2ª Integração ***por partes:*** $\begin{cases} u = e^{2x} \\ du = 2e^{x}.dx \end{cases}$ $\begin{cases} dv = \cos x.dx \\ v = senx \end{cases}$

$$u\;.\,v \;-\; \int v\;.\,du$$

$$\int e^{2x}.senxdx = \quad -e^{2x}.\cos x + 2.\left[e^{2x}.senx - \int senx2e^{2x}.dx\right]$$

Passar essa integral para o 1º **membro** da equação e somar os termos semelhantes.

$$\int e^{2x}.senx.dx = \quad -e^{2x}.\cos x + 2.e^{2x}.senx - 4.\int e^{2x}.senx.dx$$

$$\int e^{2x}.senx.dx + 4.\int e^{2x}.senx.dx = \quad -e^{2x}.\cos x + 2e^{2x}.senx$$

$$5.\int e^{2x}.senx.dx = \quad -e^{2x}.\cos x + 2e^{2x}.senx$$

$$\int e^{2x}.senx.dx = \quad -\frac{e^{2x}.\cos x}{5} + \frac{2e^{2x}.senx}{5} + C$$

ou

$$\int e^{2x}.senx.dx = \quad \frac{1}{5}.\left(-e^{2x}.\cos x + 2e^{2x}.senx\right) + C$$

ATIVIDADES PRÁTICAS:

Calcular as integrais abaixo utilizando o método da integração por partes:

	Partes	Resposta
01) $\int x.e^x.dx$	**Partes:** $\begin{cases} u = x \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = e^x.dx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $x.e^x - e^x + C$
02) $\int x^2.e^x.dx$	**Partes:** $\begin{cases} u = x^2 \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = e^x.dx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + C$
03) $\int \ln x.dx$	**Partes:** $\begin{cases} u = \ln x \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = dx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $x.\ln x - x + C$
04) $\int (x+1).senxdx$	**Partes:** $\begin{cases} u = x+1 \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = senx.dx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $senx - (x+1).\cos x + C$
05) $\int x^2.senxdx$	**Partes:** $\begin{cases} u = x^2 \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = senxdx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $-x^2.\cos x + 2x.senx + 2.\cos x + C$
06) $\int e^x.senxdx$	**Partes:** $\begin{cases} u = e^x \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = senx.dx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $\frac{1}{2}.(-e^x.\cos x + e^x.senx) + C$
07) $\int arctgx.dx$	**Partes:** $\begin{cases} u = arctgx \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = dx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $x.arctgx - \frac{1}{2}.\ln\left\|1 + x^2\right\| + C$
08) $\int x.sen5xdx$	**Partes:** $\begin{cases} u = x \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = sen5x.dx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $-\frac{x}{5}.\cos 5x + \frac{1}{25}.sen 5x + C$
09) $\int e^x.\cos\frac{x}{2}.dx$	**Partes:** $\begin{cases} u = e^x \\ du = ? \end{cases}$ $\begin{cases} dv = \cos\frac{x}{2}.dx \\ v = ? \end{cases}$	**Resposta:** $\frac{2}{5}e^x.(sen\frac{x}{2} + 2.\cos\frac{x}{2}) + C$

INTEGRAL DEFINIDA (TEOREMA FUNDAMENTO DO CÁLCULO "TFC"):

A **integral** de uma função foi criada originalmente para determinar a ***área sob uma curva no plano cartesiano*** e também surge naturalmente em dezenas de problemas de Física, como por exemplo, na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea em todos os instantes.

Seja uma função ***f(x)*** definida e contínua num intervalo real **[a,b]**. A integral definida de ***f(x)***, de **a** até **b**, é um número real, e é indicada por:

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)}$$

Fórmula da Integral Definida.

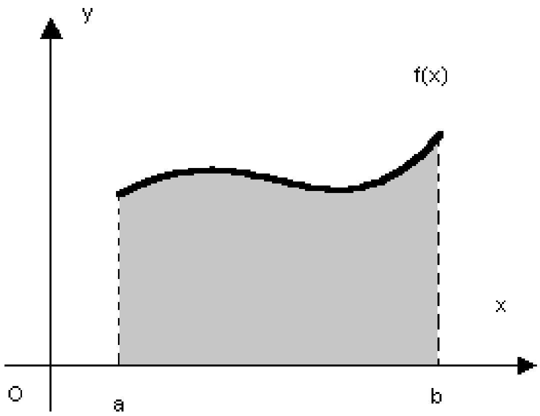
onde:

- **a** é o limite inferior de integração;
- **b** é o limite superior de integração;
- **f(x)** é o integrando.

Se $f(x) \geq 0$:

- a **<u>área</u>** entre o eixo **x** e a curva ***f(x)***, no intervalo **a ≤ x ≤ b** é representada pela integral definida:

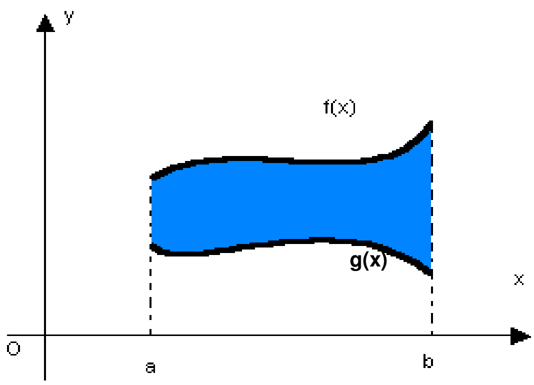
$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$



Se $f(x) \geq g(x)$:

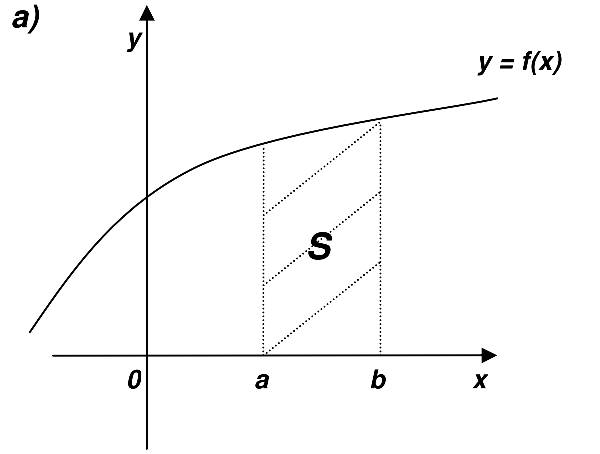
- a **<u>área</u>** entre as curvas ***f(x) e g(x)***, no intervalo **a ≤ x ≤ b** é representada pela integral definida:

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right].dx = F(b) - F(a)$$



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA (CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRAÇÃO):

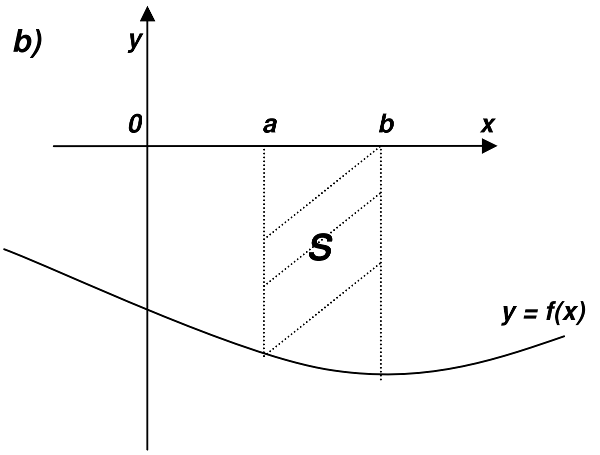
a)



Área

$$\int_a^b f(x)\,.dx = \quad S$$

b)



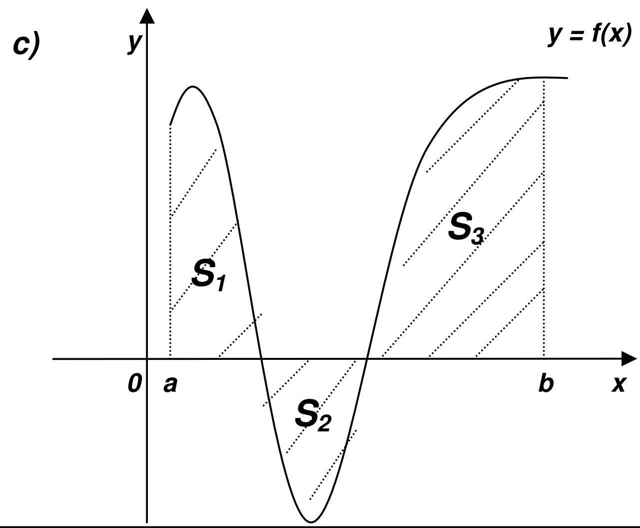
Área

$$\int_a^b f(x)\,.dx = \quad -S$$

ou

$$\int_a^b f(x)\,.dx = \quad |S|$$

c)



Área

$$\int_a^b f(x)\,.dx = \quad S_1 - S_2 + S_2$$

ou

$$S_1 + |S_2| + S_2$$

EXEMPLOS:

01) Calcular a Integral Definida $\int_1^3 x.dx$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_1^3$$

1º Integral.

2º Substituição do limite superior "menos" o limite inferior. F(b) – F(a)

$$\Rightarrow \frac{(3)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} \Rightarrow \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{4}$$

02) Calcular a Integral Definida $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t.dt$

$$\Rightarrow sen\ t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

1º Integral.

2º Substituição do limite superior "menos" o limite inferior. F(b) – F(a)

$$\Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) \Rightarrow 1 - 0 \Rightarrow \boxed{1}$$

03) Calcular a Integral Definida $\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1)\,dx$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + x\Big|_0^1$$

1º Integral.

2º Substituição do limite superior "menos" o limite inferior. F(b) – F(a)

$$\Rightarrow \left[\frac{(1)^2}{4} - \frac{4.(1)^3}{3} + 1\right] - \left[\frac{(0)^2}{4} - \frac{4.(0)^3}{3} + 0\right] \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow \frac{3 - 16 + 12}{12} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{12}}$$

04) Calcular a Integral Definida $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}.dx$

Substituímos e calculamos a derivada de: $\{$ **u = x² + 1** **du = 2xdx** ➔ $dx = \frac{du}{2x}$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}.dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{u}.\frac{du}{2x} \Rightarrow \frac{1}{2}.\int_0^1 \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{1}{2}.\ln u\Big|_0^1$$

Informação: *ln 1 = 0*

Substituindo novamente: $\Rightarrow \frac{1}{2}.\ln(x^2 + 1)\Big|_0^1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.\ln(1^2 + 1) - \frac{1}{2}.\ln(0^2 + 1) \Rightarrow \frac{1}{2}.\ln(2) - \frac{1}{2}.\ln(1) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}.\ln 2}$$

ATIVIDADES PRÁTICAS:

Calcular as integrais definidas abaixo:

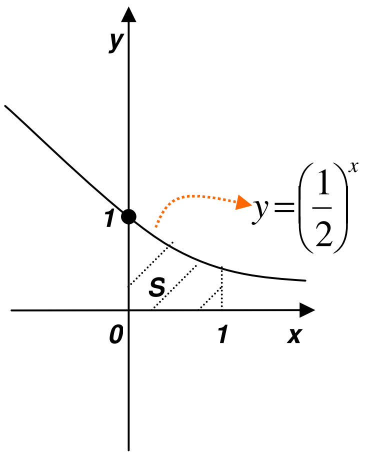
01) $\int_1^2 (6x-1).dx$	**Resposta: 8**
02) $\int_0^1 (x-1).(x-2).dx$	**Resposta:** $\frac{5}{6}$
03) $\int_{-2}^{-1} 2x.(x+1).dx$	**Resposta:** $\frac{5}{3}$
04) $\int_1^2 (3x+2)^2.dx$	**Resposta: 43**

05) $\int_0^1 \frac{(x^2+2x)}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+4}}.dx$	**Substituir:** $u = x^3 + 3x^2 + 4$	**Resposta: 0,74**
06) $\int_1^3 \frac{x.dx}{(3x^2-1)^3}$	**Substituir:** $u = 3x^2 - 1$	**Resposta: 0,0207**
07) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} senx.\cos x.dx$	**Substituir:** $u = senx$	**Resposta: 0**
08) $\int_{\pi/2}^{4\pi} 5.senx.dx$		**Resposta: – 5**
09) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x.dx}{(e^x+1)^2}$	**Substituir:** $u = e^x + 1$	**Resposta: 1/6**
10) $\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2-2x}{x}\right).dx$		**Resposta: – 8**

ATIVIDADES PRÁTICAS:

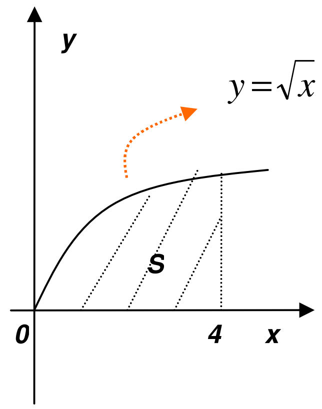
Calcular as áreas sombreadas abaixo:

01)



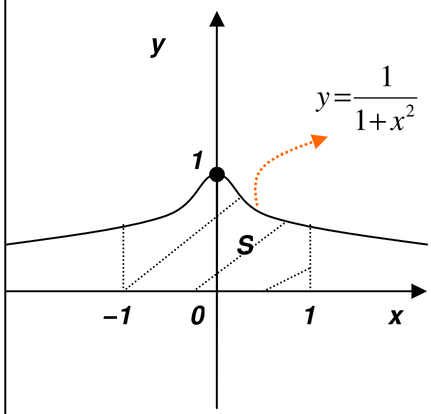
Resposta: $\frac{1}{2.\ln 2}$ ou $-\frac{1}{2.\ln \frac{1}{2}}$

02)



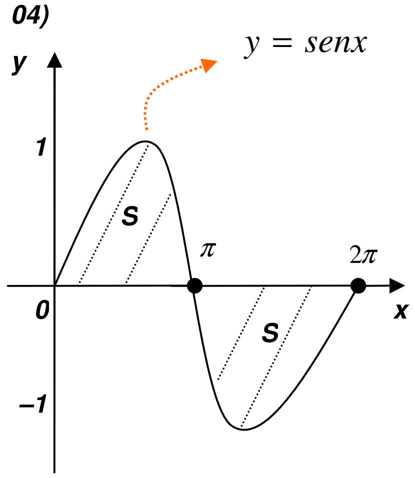
Resposta: $16/3$

03)



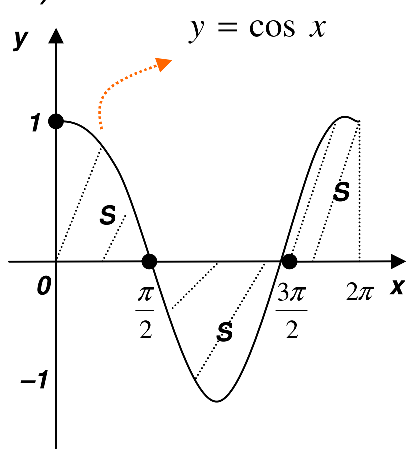
Resposta: $\frac{\pi}{2}$

04)



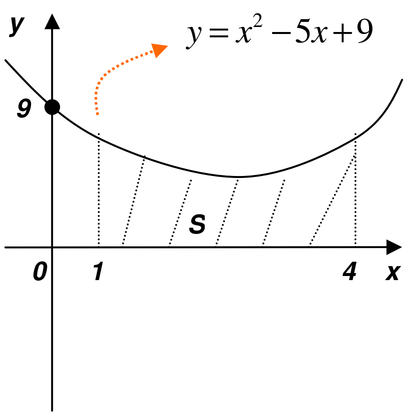
Resposta: 4

05)



Resposta: 4

06)



Resposta: $\frac{21}{2}$

07) Calcular a área da superfície limitada pelo eixo dos ***x*** e pela curva da equação ***y = 3.x² –3***, entre os pontos: ***x = 2*** e ***x = 4***. **Resposta: 50**

08) Calcular a área da superfície limitada pelo eixo dos ***x*** e pela curva da equação ***y = 7.x –x² –10***, entre os pontos: ***x = 3*** e ***x = 5***. **Resposta: 20/6**

Calcule a área da região sob o gráfico da função *f* nos casos:

09) $f(x) = x^2 \quad , \quad 1 \le x \le 3$ **Resposta: 26/3**

10) $f(x) = x^4 \quad , \quad 0 \le x \le 1$ **Resposta: 1/5**

11) $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad 0 \le x \le 4$ **Resposta: 16/3**

12) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad , \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1$ **Resposta: –3**

13) $f(x) = x^2 - 4 \quad , \quad 0 \le x \le 2$ **Resposta: 16/3**

14) $f(x) = x^3 \quad , \quad -2 \le x \le 2$ **Resposta: 0**

15) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad , \quad -2 \le x \le -1$ **Resposta: ½**

16) $f(x) = x^3 \quad , \quad -1 \le x \le 1$ **Resposta: ½**

17) $f(x) = -x^2 + 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$ **Resposta: 2/3**

18) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad , \quad -2 \le x \le 2$ **Resposta: 1**

19) Calcular a área da região compreendida (delimitada) entre as curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.
Resposta: 8/3

20) Sendo $f(x) = -2.x^4$ e $g(x) = 2x^2 - 4x$, calcule a área da região delimitada pelos gráficos de *f* e *g*.
Resposta: 14/15

Referências Bibliográficas

BOULOS, PAULO, Cálculo Diferencial e Integral – Vol 1 – Editora Pearson.

LEITHOLD, L., O Matemática Aplicada à Economia e Administração. São Paulo: Harbra, 1988.

STEWART, JAMES, Cálculo Vol. I. 4ª Ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

SWOKOWSKI, EARL W., Cálculo com Geometria Analítica – Vol 1 – Editora Makron Books.

THOMAS, GEORGE B., Cálculo – Vol 1 – Editora Pearson.